Avatares de la forma II.
Tópicos del Seminario, 43.
Enero-junio 2020, pp. 213-265.

Entrevista con Luciano Boi ¿Qué es la topología? Matemáticas, ciencia, filosofía y arte

Arturo Romero Contreras
Universidad Autónoma de Puebla

Traducción de Yatzel Roldán López[1]

*A continuación, se presenta la versión traducida de la entrevista que Arturo Romero Contreras realizó a Luciano Boi en París durante el verano del 2017. Luciano Boi es profesor en la Escuela de Altos Estudios en Ciencias Sociales (*EHESS*), en el Centro de Análisis de Matemáticas Sociales (*CAMS*). Ha trabajado desde hace tiempo en la rama de la topología, incursionando en otros campos como la física, la biología, la arquitectura e incluso las artes. La filosofía se halla entre sus temas de investigación, en especial las interacciones entre geometría y física, la fenomenología y la geometría de la percepción espacial, la epistemología, la historia de las ciencias matemáticas y la historia del arte.*

Arturo Romero —Sea bienvenido, gracias por aceptar hablar con nosotros.

---

[1] Revisión técnica: Arturo Romero Contreras. Agradecimientos a Josué David Castillo García y a Jimena Picazo Meza por su apoyo en la transcripción y la traducción. Todas las notas, aclaraciones e imágenes fueron agregadas por Arturo Romero Contreras.

Luciano Boi —Es un placer para mí, estoy encantado de poder hablar contigo sobre estas cuestiones. Es verdad que la topología es una rama relativamente nueva de las matemáticas, ha cambiado sus perspectivas y, al mismo tiempo, ha modificado la filosofía de las matemáticas, en particular, la filosofía del espacio. Su interés se mantiene en el hecho de que la topología abre nuevos campos de investigación, nuevas perspectivas en varias esferas y en especial en las ciencias vivas, la fenomenología de la percepción, de la cognición espacial y temporal.

En primera instancia nos preguntamos: ¿por qué el cambio de perspectiva de las matemáticas como consecuencia de la topología? La topología es una rama de las matemáticas que se desarrolla a partir del siglo XIX, aunque incluso se puede rastrear en cierto número de escritos que se remontan a Leibniz, en específico en su *Analysis Situs*, el cual buscaba ofrecer un estudio más cualitativo del espacio. No obstante, la topología, como rama autónoma de las matemáticas, se desarrolla a partir de la segunda mitad del siglo XIX, gracias al trabajo de Riemann y Poincaré. Riemann obtuvo muchos resultados y revolucionó nuestra visión del espacio, inventado la geometría riemanniana. Lo novedoso de ella reside en la geometría diferencial, que se encarga de comprender las propiedades locales del espacio, es decir, la métrica esencialmente. No obstante, al mismo tiempo, implica un número específico de propiedades globales, específicamente, la curvatura y la forma global del espacio, como su borde, etcétera.

ARC —Perdón que te detenga; esto es muy interesante, pero no es fácil comprender la relación entre las matemáticas contemporáneas y la filosofía. Si hablamos de singularidades, de superficies, continuidad, de discontinuidad, de la característica de Euler, o si hablamos de la topología, sobre la cual tú trabajas, es muy difícil percatarse de un vistazo por qué los filósofos deberían aprenden matemáticas y en particular acercarse a la topología. Podemos hablar de un giro espacial en las ciencias sociales. Si tomamos, por ejemplo, estudios recientes sobre la *ciudad, observamos que la dimensión espacial se ha vuelto fundamental para comprender nociones como qué es un límite, una frontera, cómo tienen lugar los desplazamientos poblacionales, su distribución, etc., hay muchos conceptos espaciales. Hablamos también en la geografía, de un orden espacial. Y hay una preocupación en filosofía por la espacialidad, que la encontramos en Husserl o en Heidegger y su pregunta por lo que quiere decir "habitar un mundo". También hay elementos espaciales en la biología, como la forma de la proteína, la forma del ADN, etcétera. Hay muchas referencias espaciales también ahí. Yo me preguntaba cómo llegaste a esos problemas matemáticos. Podemos comenzar a hablar de ello en un primer momento, y después podrías también hablarnos acerca de cómo relacionas estos lados de la ecuación: es decir, la dimensión meramente matemática, por un lado, y la filosofía, el arte, la arquitectura, la biología, la física..., por el otro. Así que podríamos comenzar revisando los caminos que has recorrido, si gustas, desde las ciencias matemáticas.*

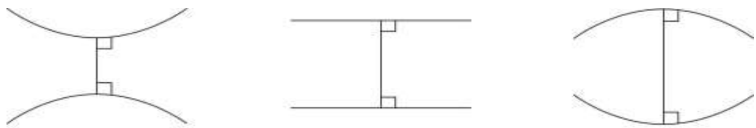
LB —Así es; es un camino muy poco lineal, en el sentido de que ha habido una cantidad de bifurcaciones y ramificaciones, pero también hay un hilo conductor, o varios hilos conductores, esenciales. Llegué a la topología en un primer momento gracias a la geometría euclidiana, y luego, a partir del descubrimiento de geometrías no-euclidianas, porque éstas involucran un conjunto de conceptos ausentes en la primera. Entre ellos, por ejemplo, está la noción de *curvatura*, la noción de *geometría intrínseca* de una superficie; otra noción central es la de *inmersión*. Pero la geometría riemanniana se basa en el concepto de la métrica, lo que quiere decir que buscaba principalmente determinar funciones de la distancia: la distancia entre ciertos puntos dados en un espacio con ciertas propiedades. Resulta entonces bastante natural extender esta noción e introducir otras geometrías que buscan comprender y describir estructuras del espacio que no hagan referencia a la métrica.

Es la topología la que introduce esas nociones. Como decía, la importancia de la topología consiste en introducir un nuevo campo de conceptos. Entre ellos, los más importantes son los de continuidad, conectividad y globalidad. Se sabe que la métrica se interesa únicamente por las propiedades locales del espacio, propiedades que cambian localmente. Estas son elementos infinitesimales atribuidos a puntos de referencia locales en el espacio, los cuales pueden cambiar únicamente por modificación en las coordenadas. Ahora, en el siglo XIX, ciertos matemáticos como Riemann y Poincaré comprendieron también que el espacio tenía propiedades globales, que no dependen de la métrica, de las relaciones locales. Entonces se comienza a distinguir entre esas propiedades locales, que son relativas a la métrica y a la distancia, propiedades locales del espacio; y propiedades globales, que conciernen a la forma del espacio, es decir, su borde, su contorno, la curvatura global, etcétera. Y la topología, por lo tanto, permite relacionar el análisis del espacio con nociones de naturaleza mucho más cualitativas, en vez de interesarse solamente por determinar sus relaciones locales de manera cuantitativa.

ARC —La idea de espacio con la que muchos filósofos se han familiarizado es aquella asociada a Descartes. ¿Cuál es el cambio que tiene lugar entre la geometría euclidiana, que llega hasta Descartes y que incluye el plano cartesiano, es decir, la idea de poder situar puntos en el espacio, y el pensamiento topológico, que comienza con Gauss y Riemann?

LB —Para empezar, los filósofos, hasta el siglo XVIII (puede ser que hasta el siglo XIX) conocían solo la geometría euclidiana, razonaban a partir de ella; el mismo Kant lo hizo. No conocían la geometría no-euclidiana, no conocían la topología, etc. Hubo seguramente cambios significativos, como ya se mencionó, introducidos por Leibniz, en particular sobre una posible geometría cualitativa, que permitiría analizar las propiedades cualitativas del espacio.

La geometría cartesiana, en el fondo es una generalización de la geometría euclidiana, porque introduce las coordenadas cartesianas, que permiten generalizar las coordenadas euclidianas y traducirlas a un lenguaje algebraico. Descartes introduce herramientas algebraicas para generalizar la geometría euclidiana; pero a partir del descubrimiento de las geometrías no-euclidianas se comprende rápidamente que hay otros parámetros posibles. No sólo hay parámetros cartesianos, hay muchos otros que pueden ser descritos en la geometría esférica, en la geometría elíptica y en la geometría hiperbólica (Fig. 1).



Geometría hiperbólica — Geometría euclidiana — Geometría elíptica

Figura 1. Fuente: Noneuclid.svg. Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Noneuclid.svg Licencia: CC BY-SA 3.0

Todo lo anterior se vuelve fundamental, porque abre una posible pluralidad de geometrías, las cuales sirven para representar el espacio local, en primera instancia. Tras este primer punto de inflexión en la concepción del espacio, siguen otros desarrollos basados en una distinción conceptual fundamental, que consiste en mostrar que la métrica no es suficiente para conocer la estructura intrínseca de un espacio. Para conocer el modo de existencia del espacio —como lo diría un filósofo—, sus estructuras, sus articulaciones, sus interacciones, es necesario introducir nociones topológicas, las cuales involucran elementos filosóficos que van a cambiar radicalmente la comprensión del espacio, como la introducción del concepto de *deformación*. Una deformación matemática implica la idea de poder deformar un espacio en otro espacio sin modificar su estructura interna (Fig. 2).

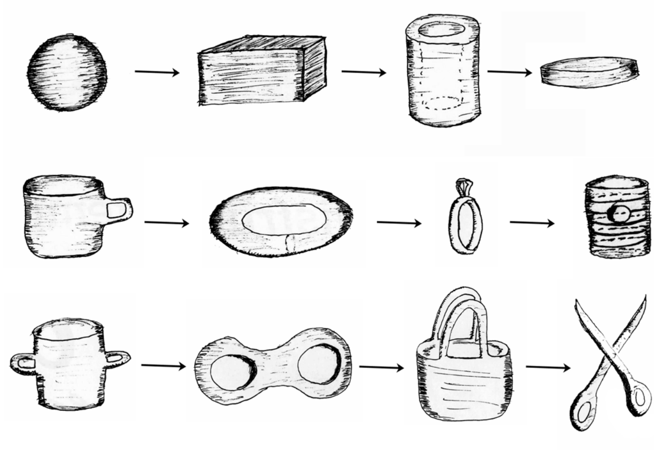


Figura 2. Ejemplo de transformaciones continuas (homeomorfismo). Los objetos de cada fila son topológicamente equivalentes porque uno se puede deformar en el otro de manera continua, es decir, sin cortar ni pegar el objeto. Fuente: Arturo Romero Contreras. Licencia: CC BY-SA 3.0.

En lenguaje matemático a esto se le llama una biyección con su inversa. Una biyección continua es invertible; esto hace comprender, en principio, ciertas cosas. Primero, que el espacio no es un objeto fijo, que no está dado de una vez y para siempre. Segundo, hay que comprender que el espacio puede ser transformado dinámicamente y que puede ser cambiado por medio de deformaciones. Por ello, hay que suponer que el espacio no es rígido, sino que aparece como algo flexible; tiene una cierta plasticidad y elasticidad.

Si se consideran estas nociones, se vuelve completamente esencial el entender que un espacio no solamente puede ser caracterizado por una o varias métricas, porque, evidentemente, la métrica esférica no es la misma que vale en la geometría euclidiana, al mismo tiempo que la geometría elíptica no vale para la geometría euclidiana. Esto modifica la noción que podemos establecer sobre la distancia; es decir, se introducen nuevos métodos para caracterizar, para definir la noción de distancia. Pero lo importante es que para la topología un análisis local del espacio no es suficiente para comprender a la vez la estructura interna y sus deformaciones globales.

Así, la noción de *deformación* resulta ser verdaderamente el corazón de esta revolución conceptual del espacio. Se trata de una noción central en todas las nuevas ramas que se van a desarrollar a partir del siglo XIX gracias a Henry Poincaré y otros matemáticos, principalmente la geometría algebraica, la geometría diferencial ya fundada por Riemann, la teoría de grupos, después la llamada topología diferencial y el análisis topológico. Todas esas ramas de la matemática se desarrollan a partir de una extensión, una profundización conceptual de la noción de deformación, debido a que no se razona más sobre un espacio dado sino sobre un espacio que podría dar lugar a una clase de equivalencia de espacios, dicho de otra manera, a espacios que por deformación continua resultan espacios equivalentes. Eso introduce también un cambio radical que concierne a la naturaleza filosófica del espacio. No es suficiente ver el espacio, su análisis no se puede basar en nociones visuales; hace falta introducir intuiciones filosóficas mucho más profundas (Fig. 3).

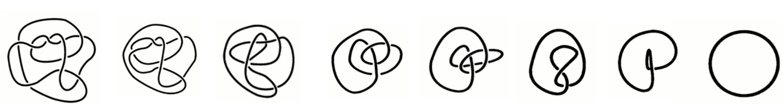


Figura 3. Fuente: Knot Unfolding.gif Autor: Kuchtac. Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Knot_Unfolding.gif Licencia: CC BY-SA 4.0 La imagen muestra la manipulación, sin cortar, ni pegar, de un nudo aparente, demostrando que es equivalente a un círculo (un nudo trivial). Aunque visualmente la primera y la última figura sean muy distintas, si manipulamos idealmente el nudo, veremos que uno puede ser *deformado continuamente* (es decir, sin cortar, ni pegar) en el otro.

ARC —Para llegar a esta forma de pensar el espacio hay que cambiar la aproximación general. Pienso sobre todo en el theorema egregium *de Gauss, de mirar el espacio desde dentro y no desde fuera, sino hacer una inmersión del espacio. Hay que mirar el espacio desde dentro, comprenderlo desde él mismo, y no por relación exclusiva con otro espacio como el euclidiano. A menudo se reduce la geometría a las figuras geométricas; a éstas las trazamos, las medimos, pero están sumergidas en el espacio euclidiano, y será Gauss quien cambie esta manera de aproximarse al espacio.*

LB —Sí, es probablemente el primer giro conceptual que ha modificado nuestra visión del espacio, que la filosofía no tuvo en cuenta y que muestra ya un alejamiento de ella respecto a la reflexión sobre el espacio. La idea fundamental de Gauss, a inicios del siglo XIX, entre 1827 y 1830 consiste en comprender que si se toma un objeto geométrico, una superficie, por ejemplo, este objeto no presenta únicamente propiedades que dependen de sus relaciones con el espacio exterior, a saber, el espacio euclidiano, sino que contiene una geometría propia, intrínseca. Esta geometría es en cierta manera independiente de sus relaciones con el espacio exterior, ambiental, euclidiano. Ese es un punto fundamental ¿por qué? Desde la antigua Grecia estábamos acostumbrados, con sus geómetras, o bien a considerar las figuras sobre el plano, a dibujarlas en el plano, asignando propiedades por deducción, o bien, a considerar sólidos, pero siempre existentes en el espacio. No se les consideraba como objetos geométricos que podían exhibir propiedades, sino únicamente como sólidos definidos en relación con el espacio que los contiene. De tal manera una superficie, un volumen, un objeto geométrico eran considerados como algo contenido en un espacio abstracto, pero que no tenía en sí mismo una estructura. Así que la idea de Gauss consistió en afirmar que un objeto geométrico, una superficie, tiene una geometría intrínseca. Las propiedades intrínsecas de una superficie son, por supuesto, la curvatura, principalmente, que define su desviación con respecto a un espacio geométrico euclidiano dado. Pero esta curvatura, la cual es un concepto muy complejo, no es únicamente una noción local, sino que también puede ser caracterizada por propiedades globales.

¿Qué cambia, desde un punto de vista filosófico, este giro geométrico? La idea filosófica central consiste en mirar el interior de un objeto, suponiendo que este objeto puede mostrar propiedades geométricas intrínsecas. Es decir, que su geometría, su modo de existencia, puede ser mucho más rico, mucho más complejo de lo que se puede suponer al verlo, o definirlo desde un espacio que operaría como su contenedor. También se da una cierta importancia, no sólo matemática, sino a su vez, filosófica, al objeto, y se comprende por ello, que el objeto no es fijo, no es estático; es más bien un objeto dinámico, porque el objeto mismo puede ser transformado, puede presentarse bajo diferentes formas. Sus propiedades intrínsecas, como la curvatura, pueden variar, ellas mismas también pueden ser influidas por cambios internos en la superficie, y el objeto geométrico mismo. Dicho de otra manera, lo que verdaderamente cambia en esta nueva concepción de objetos geométricos consiste en no considerarlos más como objetos abstractos que dependerían del espacio exterior, sino como objetos concretos que pueden exhibir una geometría, incluso, varias geometrías posibles.

ARC —Hemos hablado de los griegos y de Descartes, y hemos llegado a Kant cuya idea del espacio es a su vez una generalización de la de aquél. Para Kant es la mente la que proporciona el espacio (o el sujeto, para quien el espacio y el tiempo constituyen las formas de la sensibilidad), el cual es concebido como a priori, absoluto y homogéneo. Pero cuando hablas de la posibilidad de que los objetos puedan tener una geometría intrínseca, eso quiere decir que no se toman necesariamente para introducirlos en el espacio ambiente euclidiano. Entonces yo te pregunto: ¿el objeto o los objetos pueden ser comprendidos como un espacio en sí mismos?

LB —Como lo has dicho, el objeto no es más un objeto sólido, un volumen; es más bien un espacio, el cual puede engendrar, a su vez, nuevos espacios si lo sometemos a un número de deformaciones. Entonces eso que hasta el siglo XVIII podía parecer únicamente un objeto con volumen, que habita en, que depende del espacio ambiente, se transforma, gracias a Gauss, en un objeto con geometría propia. Pero enseguida se entiende que, si el objeto con una geometría propia es un espacio en sí mismo, puede además tener otras propiedades intrínsecas, por ejemplo, algebraicas, topológicas (incluso físicas, por supuesto, que están relacionadas con las propiedades algebraicas y topológicas). Kant no había comprendido verdaderamente este punto esencial matemático, porque él pensaba que el espacio euclidiano tridimensional, de alguna manera, era un espacio absoluto, o, en todo caso, que la estructura del espacio euclidiano estaba integrada en cierta forma, en nuestra intuición subjetiva del espacio y que, por lo tanto, este espacio euclidiano, esta estructura euclidiana del espacio era una condición necesaria de la intuición (Fig. 4).

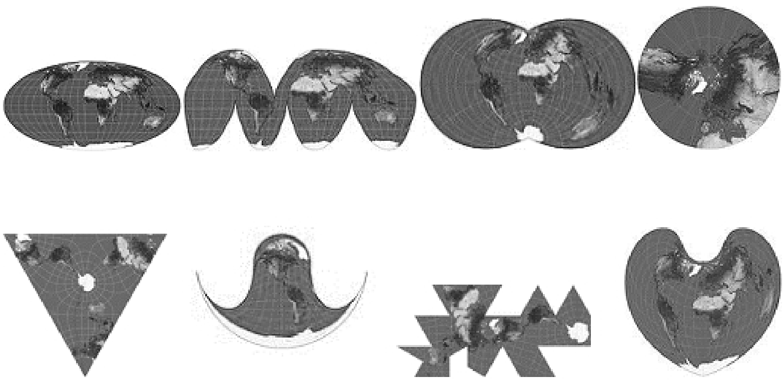


Figura 4. Fuente: Todas las imágenes provienen de la entrada de Wikipedia: "List of map proyections". Disponibles en: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_map_projections Autor: Strebe. Licencia: CC BY-SA 3.0. Del teorema de Gauss se sigue que no

> se pueda proyectar de una *única* manera una esfera sobre el plano. Las diferentes proyecciones aquí presentadas del planeta tierra son todas correctas en tanto que *preservan algún elemento estructural*. Algunas proyecciones preservan, por ejemplo, distancias, mientras que otras, forma. Ninguna proyección puede preservar toda la estructura de la esfera, porque ésta posee una curvatura intrínseca continua (k=1), mientras que el plano no posee curvatura alguna (k=0).

Sabemos, antes que nada, que no hay un espacio tridimensional absoluto. Es decir, que no hay un único modelo de espacio tridimensional, solamente euclidiano. Desde el siglo pasado se sabe que hay una pluralidad de geometrías tridimensionales, por lo que la geometría euclidiana resulta un caso particular. Se conocía la clasificación de superficies, de espacios en dos dimensiones, se tenía un teorema de clasificación dado por Poincaré y un matemático alemán llamado Koebe a principios del siglo XIX. Es un teorema que lleva el nombre de *Clasificación de superficies.* Es decir, se sabía que las superficies podían ser transformadas, deformarse las unas en las otras. Hay tres tipos de superficies: la superficie con curvatura nula, la superficie con curvatura negativa y la superficie con curvatura positiva. Pero no se tenía del todo una clasificación para los espacios tridimensionales. Fue alrededor de los años setenta cuando se dio una clasificación, aunque no es una clasificación definitiva, de espacios tridimensionales, que muestra que no hay un único modelo de espacio tridimensional, como Kant creía, como todos los filósofos antes de él creían. Por ejemplo, los neopositivistas, filósofos como Carnap o como Reichenbach pensaban, efectivamente, como muchos otros, que había un solo espacio tridimensional. Sin embargo, la gran idea matemática y filosófica consiste en haber comprendido que hay una pluralidad de espacios tridimensionales y que estos espacios no revisten un interés únicamente matemático. Son de interés también para la física, porque hay áreas de ésta o fenómenos que funcionan con algunos de estos espacios tridimensionales y no solamente con el espacio euclidiano (Figs. 5-6).

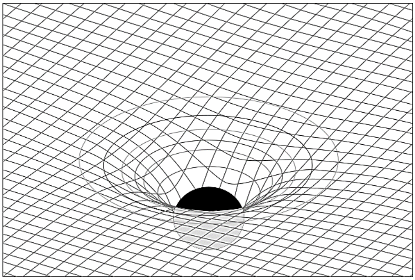


Figura 5. Fuente: Gravitation space source.svg Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gravitation_space_source.svg Licencia: CC0 1.0 Representación del espacio-tiempo de la teoría de la relatividad. Se puede ver la curvatura producida por la masa de un cuerpo sobre un plano. Esta geometría es no-euclidiana.

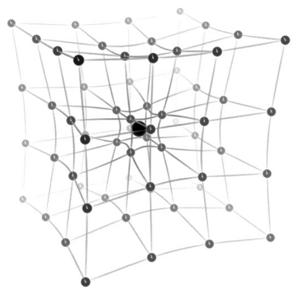


Figura 6. Fuente: General relativity time and space distortion frame 1.png Autor: Lucas Vieira Barbosa. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/File:General_relativity_time_and_space_distortion_frame_1.png Representación del espacio-tiempo de la teoría de la relatividad. Se puede ver la curvatura producida por la masa de un cuerpo en un espacio tridimensional. Esta geometría es no-euclidiana.

Son también de interés para la biología, porque un organismo vivo está conformado por una variedad de espacios. El espacio de la molécula no es el mismo que el de la célula y el espacio de la célula no es el mismo que el del organismo entero (Figs. 7-8).

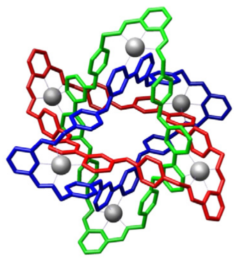


Figura 7. Fuente: Molecular Borromean Rings Atwood Stoddart commons.png Autor: Mstone at English Wikipedia. Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Molecular_Borromean_Rings_Atwood_Stoddart_commons.png Imagen generada a partir de una estructura de cristal reportada por James Fraser Stoddart et al. Science 2004, 304, 1308-1312. La imagen muestra un anillo Borromeo molecular.

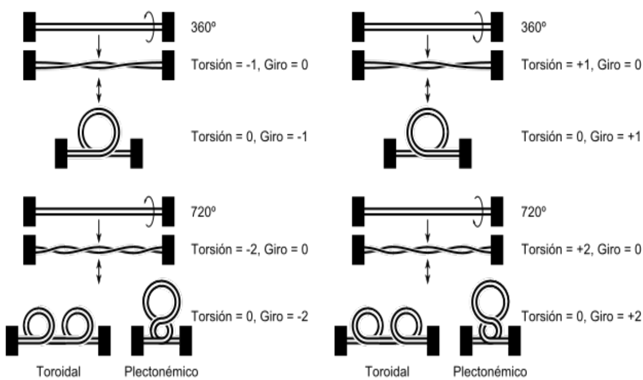


Figura 8. Fuente: Linear DNA Supercoiling-es.svg Autor: Richard Wheeler (Zephyris). Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linear_DNA_Supercoiling-es.svg Licencia: CC BY-SA 3.0 Estructura de moléculas enrolladas de DNA. Las torsiones son propiedades topológicas que tienen efectos sobre la operación de las moléculas.

Esta idea de pluralidad de espacios tridimensionales es central también en el campo de la arquitectura, es decir, que a partir de ello se entiende que puede haber diferentes maneras de organizar el espacio tridimensional (Figs. 9-11).

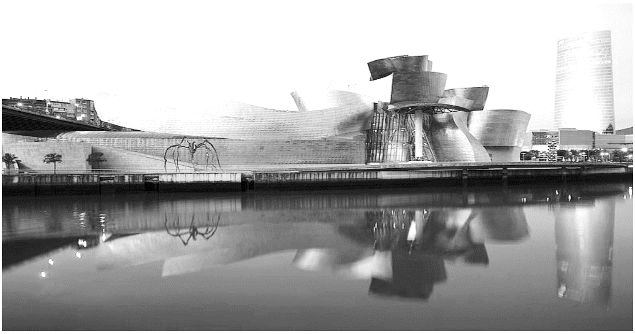


Figura 9. Ejemplo en arquitectura de geometría no-euclidiana. Fuente: Bilbao-Guggenheimaurore.jpg Autor: PA. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Bilbao_-_Guggenheim_aurore.jpg Licencia: CC BY-SA 4.0.

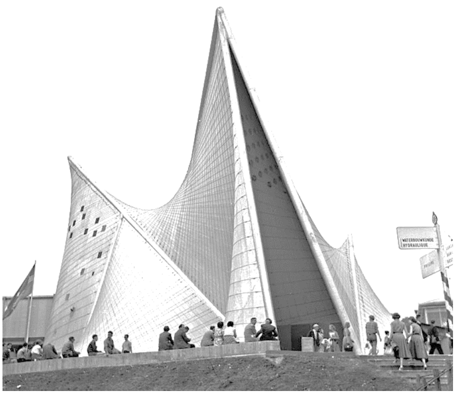


Figura 10. Ejemplo en arquitectura de geometría no-euclidiana. Fuente: Expo58 building Philips.jpg Autor: Wouter Hagens. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Expo58_building_Philips.jpg Licencia: CC BY-SA 3.0.

Figura 11. Ejemplo en arquitectura de geometría no-euclidiana. Fuente: MUC Bghsn MaeWestA2 1.jpg Autor: Bbb at wikivoyage shared. Disponible en: https://en.wikipedia.org/wiki/File:MUC_Bghsn_MaeWestA2_1.jpg Licencia: CC BY-SA 3.0

La geometría euclidiana es una de esas maneras, pero hay otras formas posibles de organizar el espacio tridimensional, y de organizar las relaciones entre los organismos vivos y esos espacios. Por ejemplo, se puede muy bien tomar modelos hiperbólicos del espacio tridimensional que resultaría no solamente pertinente, sino que podría exhibir cualidades, formas y otras propiedades en verdad interesantes para el espacio fenomenológico, para el espacio vivo, y para la organización arquitectónica de la vida, por ejemplo.

Entonces, este descubrimiento fundamental que, en mi opinión, constituye un giro filosófico, pero que, a su vez, la filosofía no supo comprender en sus alcances, tuvo consecuencias verdaderamente significativas en todas las áreas, desde las ciencias de la naturaleza a las ciencias sociales, la arquitectura y el arte, como tú decías. Si se piensa, muchas de nuestras acciones, movimientos, actividades, se desarrollan en el espacio euclidiano, pero muchas otras, tanto fisiológicas, como metabólicas, artísticas, creativas, pueden desarrollarse en espacios tridimensionales no-euclidianos.

La filosofía, de alguna manera, debe ella misma introducir un cambio conceptual en su forma de reflexionar sobre el espacio, y considerar que esos espacios no son solamente importantes desde un punto de vista del análisis y sus propiedades, sino también considerando la importancia que pueden tener en la vida de las personas, y por sus dimensiones, yo diría, antropológicas de su vida y fenomenológicas, claro.

Husserl había comprendido, en cierta manera, este cambio radical matemático, del que habló en varios textos, principalmente en uno sobre el espacio, sobre la geometría riemanniana en *Ding und Raum*. Él entiende que estas ideas pueden tener una importancia para comprender, por ejemplo, los movimientos del cuerpo, las acciones sensorio-motoras en el espacio. Comprende que cierto número de actividades del sistema sensorial no obedece las propiedades del espacio geométrico euclidiano. Pero no desarrolló una nueva perspectiva filosófica, que consistiría en pensar que la filosofía debe atribuir una importancia fundamental a esos espacios, a esos nuevos espacios tridimensionales, que alguna vez se atribuyó al espacio euclidiano.

II

ARC —Has mostrado un puente entre las artes y las matemáticas; recordamos aquí el desarrollo de la perspectiva en la pintura del Renacimiento, donde uno puede reconocer los comienzos de la geometría no-euclidiana, a partir del desarrollo de la geometría de la perspectiva en Desargues y en otros pintores y que desemboca en la geometría proyectiva (Fig. 12).

Figura 12. Fuente: Dürer-Zeichner und Akt.jpg Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:D%C3%BCrer_-_Zeichner_und_Akt.jpg Zeichner und Akt. Licencia: Dominio público.

Todo esto da cuenta de lo que has dicho en varios textos: que la visión no es euclidiana; ella obedece una geometría proyectiva. ¿Qué significa para la experiencia del viviente en general? ¿O para el espíritu humano? ¿Quiere decir que la experiencia tiene diferentes formas, que se desarrolla en varios espacios? Esa sería la primera pregunta y la siguiente es: ¿cómo conectan esos espacios entre ellos mismos? Porque se puede hablar, ya lo has dicho, de espacios que obedecen a ciertas propiedades, que tienen determinadas propiedades, pero entonces ¿cómo se logra la unidad de una experiencia, si ella misma se encuentra repartida en varios espacios? ¿Operan proyecciones entre ellos? ¿Hay puentes entre los espacios? ¿Cómo sucede eso?

LB —Comencemos por el ejemplo histórico de pintores y artistas, de geómetras del *quattrocento*, es decir, del Renacimiento, principalmente en Italia, pero también en otros países. Es sin duda uno de los ejemplos más importantes e interesantes de interacción y entrelazamiento fructífero entre matemáticas y arte, además, algunos de estos pintores, con sólo pensar en Piero de la Francesca, Miguel Ángel, Leonardo Da Vinci, eran a la vez, geómetras y filósofos, arquitectos y artistas. Ellos fueron quienes introdujeron las primeras nociones de perspectiva, que después fueron generalizadas, como el caso de la geometría proyectiva. La geometría proyectiva, se sabe, obvia la noción de distancia e introduce un nuevo tipo de relaciones que no hacen referencia a la distancia entre puntos. Lo anterior es importante, porque introduce un ensanchamiento del horizonte de la reflexión, del trabajo de geómetras, y al mismo tiempo, muestra que estas nuevas nociones de geometría descriptiva, proyectiva, tienen una importancia fundamental para comprender y realizar la experiencia humana. En principio porque, efectivamente esta noción geométrica permite concebir y realizar espacios arquitectónicos en los cuales se tiene, por ejemplo, una nueva noción de horizonte, de infinito. El hecho de introducir puntos al infinito, de imaginar el infinito en esos espacios, abre una nueva perspectiva también en la experiencia humana (Fig. 13).

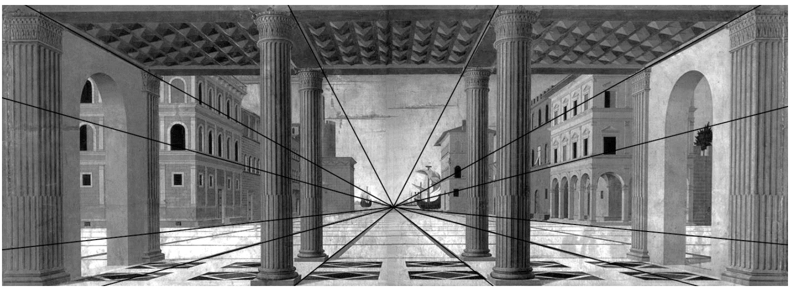


Figura 13. La veduta di città ideale. Ca. 1495. Francesco di Giorgio. Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Citt%C3%A0_ideale_di_berlino_2.jpg Licencia: dominio público.

Ya no es el infinito, digamos, euclidiano, que era un infinito *in abstracto* y que servía únicamente al formalismo, a la completitud lógica-deductiva de un sistema; pero este infinito euclidiano no tenía una dimensión concreta. Lo que cambia verdaderamente en la época de la perspectiva y de la geometría proyectiva con un Desargues, Pascal, Monge, Poncelet y muchos otros (por recordar solamente a los geómetras franceses, aunque también hubo un desarrollo en Alemania y otros países), es la noción del espacio la que comienza a ser fundamental para concebir la experiencia humana misma. Porque el infinito de la noción proyectiva introduce una nueva dimensión en la experiencia humana. Es decir, introduce un horizonte en el cual los elementos de la geometría proyectiva convergen y crean una nueva unidad. El hecho mismo de dar una dimensión concreta al infinito y de pensar que este infinito, en la perspectiva de la geometría proyectiva, permite construir una clase de síntesis de la experiencia humana mediante la apertura del horizonte y la perspectiva, es un hecho fenomenológico fundamental ¿Y por qué es fundamental? Porque la geometría deja de ser concebida como una ciencia puramente abstracta, menos aún, una ciencia formal o axiomática, sino se le concibe como una ciencia arraigada, que debe ayudar a expandir el panorama de la existencia humana, debe introducir una diversidad de niveles de vida en la experiencia humana.

El hecho de admitir que hay una multiplicidad de espacios tridimensionales, que es nuestra dimensión, biológica, física; vivimos en la tercera dimensión, incluso si podemos pensar dimensiones superiores. Es así, por ejemplo, como hemos desarrollado la teoría de la relatividad general que es de dimensión cuatro con el tiempo; y también podemos pensar objetos de dimensión quinta, sexta, séptima dimensión o más elevada, aquí finitas. Pero el hecho de introducir una multiplicidad de espacios y pensar que juegan un papel fundamental en la organización geométrica del mundo, nos ayuda a comprender que nuestra existencia, nuestra dimensión humana, no se desarrolla en un solo espacio tridimensional, sino que se desenvuelve al mismo tiempo, por supuesto, sin superposición, en múltiples espacios, siguiendo el nivel de existencia y de complejidad de ese modo de existencia. Si, por ejemplo, pienso que la percepción asume la integración de estos diferentes sistemas sensoriales, que forman, además, como diría Husserl, una síntesis, esta síntesis es de inicio de naturaleza espacial, porque involucra múltiples dimensiones, diversos tipos de espacios. Estos diferentes tipos de espacialidad comprenden, después, un nivel superior, el de la síntesis cognitiva, en el cual debemos efectuar, de alguna manera, una nueva integración, que se basa en una intuición mucho más compleja y rica (Fig. 14).

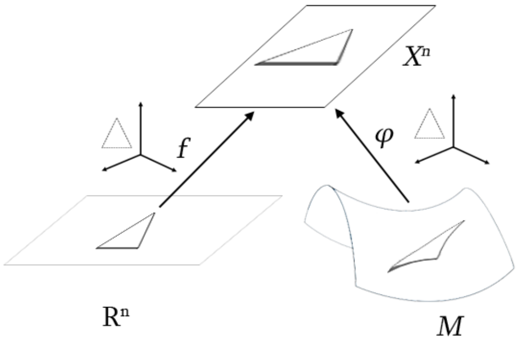


Figura 14. Posible representación topológica de la integración de un espacio euclidiano (R^n) y un espacio no-euclidiano (M) en un tercer espacio de síntesis X^n. Fuente: Arturo Romero Contreras. Licencia: dominio público.

No hay contradicción en pensar que nuestra existencia todo el tiempo está enraizada biológicamente en el espacio tridimensional, también fisiológicamente, que en su desarrollo debe utilizar diferentes tipos de espacios y construir una síntesis de estas clases diferentes de espacios. Por ejemplo, cuando yo tengo una actividad sensorio-motriz, no utilizo solamente el espacio euclidiano, sino que necesito crear una síntesis de diferentes espacios. También debería decirse de antemano, que cualquier actividad sensorio-motriz, no involucra un único parámetro geométrico, no hay un único parámetro cartesiano, hay otros parámetros: esféricos, ortogonales, y de otra naturaleza que intervienen al mismo tiempo en la misma actividad sensorio-motriz y en el nivel superior, el cognitivo y reflexivo. Estos espacios pueden intervenir en una clase de síntesis, de integración, que enriquece nuestra vida, al mismo tiempo interna, de complejidad perceptiva, de riqueza de percepción; por ejemplo, percepción de formas, percepción de objetos, de movimiento, etcétera y desde el punto de vista, yo diría, de la concepción filosófica del mundo, porque nos muestra que podemos pensar en varias dimensiones, y que, en parte, podemos actuar en varias de ellas. Por ejemplo, podríamos concebir estructuras arquitectónicas que involucren otras dimensiones, podríamos idear actividades artísticas con muchas dimensiones; podríamos incluso imaginar experiencias humanas relativas al movimiento y a la creación literaria, por ejemplo, o a ciertos logros técnicos que incluyan nuevas dimensiones, otros espacios tridimensionales además del euclidiano, al que estamos habituados. Pienso que es un punto filosófico verdaderamente fundamental. La filosofía debe hacernos entender la razón por la cual es importante pensar, a la vez, de manera abstracta y de manera concreta; que es posible desarrollar la existencia humana en varias dimensiones, y a su vez, llegar a una síntesis de ellas.

ARC —Hemos hablado sobre el espacio en general y de que los objetos se forman o constituyen un espacio en sí mismos. Pero hablamos, también, de los grandes espacios como si fueran universos que tienen otros objetos dentro de sí. Hablamos de diversos espacios que, digamos, son simultáneos, que operan al mismo tiempo. Pero has hablado también de otro nivel, nos hemos desplazado, si se quiere, en una escala que va de arriba abajo, pero también horizontalmente, entre una pluralidad de espacios. Entonces me pregunto, si has dicho, en referencia a Husserl y la fenomenología, que actuamos en una pluralidad de espacios, es decir que, sintetizamos todo el tiempo diferentes espacios (o universos), ¿piensas que esa síntesis es un espacio también? Si es que estos constituyen un nuevo espacio, o hay más bien, una relación entre espacios que no constituye un nuevo espacio. La gran cuestión filosófica general, de Kant a Husserl, y no solamente, pero pienso en este periodo moderno, es: ¿cómo sintetizar una pluralidad? Y no sólo de elementos (*sean objetos o puntos ideales, como en la teoría de conjuntos*), *se trata más bien de la síntesis de una pluralidad de espacios, de una pluralidad de universos. Entonces, la síntesis se desplaza a un nivel completamente nuevo. Al mismo tiempo, surge la pregunta: ¿cómo se desarrolla esa síntesis? ¿O de qué manera actúa? Porque podría uno preguntarse si la síntesis produce otro espacio a partir de los espacios de síntesis o si se trata, por ejemplo, de un procedimiento de inmersión de un espacio en otro, o de una deformación continua de otro tipo. En el primer caso, se constituye un tercer espacio que englobaría a los otros; en el segundo, uno se desplazaría entre los diferentes espacios, sin producir uno nuevo.*

LB —La pregunta no es fácil de responder. Yo pienso que hay dos aspectos a la vez: el primer punto es que, si se parte de la noción de *deformación continua*, en ciertos casos la deformación puede ser también discreta. Por ejemplo, si se considera una deformación por adjunción [o unión de espacios topológicos: *recollement*; no confundir con la adjunción de la teoría de categorías, A.R.] por pedazos. Luego, podemos incorporar otras nociones, como, por ejemplo, la de cortes, de cirugías, de productos conexos... (Figs. 15-16).

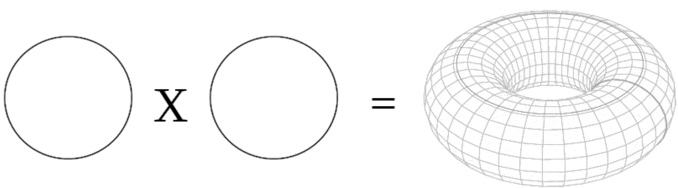


Figura 15. Fuente: Archivo Torus cycles.png Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torus_cycles.png Autor: Rotatebot. Licencia: CC BY-SA 3.0. La imagen muestra el *producto topológico* de un círculo (S1) por otro círculo (S2), lo que da como resultado un toro.

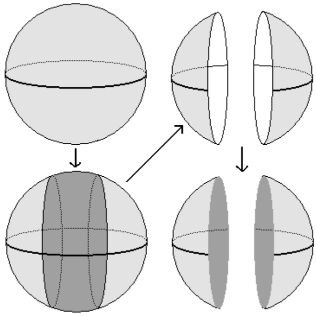


Figura 16. Fuente: Archivo Sphere-surgery1.png Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sphere-surgery1.png Licencia: dominio público. La imagen muestra una cirugía sobre la esfera (S2). Si se corta un cilindro en la esfera y luego se cierran las mitades de la esfera, acabamos con dos esferas disyuntas.

Entonces, si tomamos dos toros, creamos una relación entre ellos, creamos una interacción por adjunción y obtenemos un nuevo objeto geométrico. El toro es un espacio en sí mismo, es un espacio que puede tener propiedades intrínsecas, pero que puede estar al mismo tiempo, inmerso en R^3 o R^4, o incluso en una dimensión más alta. Por cierto, un toro es un espacio muy dinámico, porque puede tener ciertas propiedades que hacen que pueda servir de modelo a sistemas dinámicos. El toro permite una noción de conectividad mucho más rica que la que tenemos del espacio euclidiano, porque el toro no es un espacio simplemente conectado como el de la esfera, ya que en él podemos definir varios tipos de caminos; es lo que se llama *trayectos de homotopía*, lo que da un grupo de homotopía no-trivial, como la esfera, y que hace a la geometría mucho más compleja y rica (Figs. 17-19).[2]

---

[2] En topología algebraica se asocian estructuras llamadas grupos (algebraicos) a espacios topológicos. Los grupos son estructuras que intentan capturar información de estos últimos. Un modo de establecer el género de los espacios topológicos es por los grupos de homotopía asociados a ellos. La topología opera bajo el supuesto de continuidad. De este modo, podemos trazar curvas cerradas (o

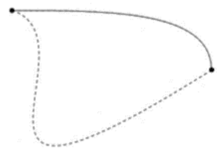


Figura 17. Fuente: HomotopySmall.gif Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HomotopySmall.gif Autor: Jim Belk. Licencia: Dominio público. La imagen muestra cómo es que una curva puede deformarse en cualquier otra, siempre y cuando sea de manera continua (sin cortar, ni pegar).

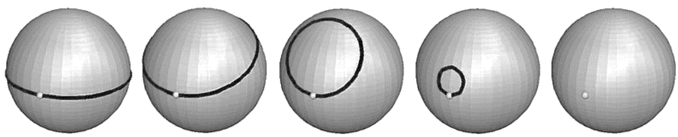


Figura 18. Fuente: 1S2all.jpg Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:P1S2all.jpg Autor: Salix Alba. Licencia: CC BY-SA 3.0. En la imagen se muestra cómo las curvas cerradas sobre una esfera pueden contraerse hasta un punto.

---

círculos: S1) sobre la superficie de interés, en este caso, la esfera. Lo que importa son todos los caminos o trayectos distintos que se pueden realizar. Puesto que dos espacios topológicos son equivalentes si pueden ser deformados el uno en el otro de manera continua, los diferentes caminos también son idénticos si uno puede ser deformado en otro. En la esfera toda curva cerrada puede ser deformada hasta un punto, sin importar dónde se trace ésta. Esto quiere decir que su grupo de homotopía es trivial. Esto no pasa en el toro (ver imagen contigua), donde el agujero central hace posibles diferentes clases de trayectos. El grupo fundamental del toro permite ver dos círculos distintos que no pueden deformarse hasta un punto, porque están trazados alrededor del agujero. Éste impide la contracción del círculo al punto. Puede parecer paradójico, pero un agujero no empobrece, sino que, al contrario, hace a un espacio *más rico*. Ésta es también una idea central: las restricciones son elementos positivos que incrementan la complejidad del espacio y, con ello, sus grados de libertad y de posibilidades en general [Nota del entrevistador ARC].

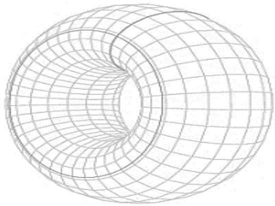


Figura 19. Fuente: Torus cycles.png Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torus_cycles.png Autor: Rotatebot. Licencia: CC BY-SA 3.0. En la imagen se aprecian dos círculos alrededor del agujero del toro, lo que constituye su grupo fundamental.

Esta es una geometría mucho más rica y compleja ahora y, consecuentemente, también para la dimensión concreta. Por ejemplo, el hecho de que sobre un espacio tórico podamos tomar varios caminos, evidentemente introduce nuevos grados de libertad, de movimiento de un sujeto, de un observador, de una persona que se desplazara en este espacio. La mayoría de las veces, la complejidad y la riqueza geométrica de un espacio geométrico y topológico se traduce en una complejidad y riqueza más grandes en la vida de las personas. Es decir, que la geometría da acceso a un nivel de existencia fenomenológico de las personas.

Pero regresando a tu pregunta, que tiene varios aspectos, en efecto, cuando se sumerge un nudo, que es un objeto unidimensional, una curva cerrada, en el espacio euclidiano tridimensional, existe la necesidad de introducir la noción dinámica de inmersión, que es una deformación, un tipo de deformación sin singularidad, es decir, que es continuamente diferenciable (Fig. 20).

Figura 20. Fuente: TrefoilKnot 01.svg Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TrefoilKnot_01.svg Licencia:

dominio público. Un nudo es una curva cerrada inmersa en R3 (espacio euclidiano tridimensional), que se define por el número y tipo de cruces. Un nudo no puede deshacerse sin ser cortado, pero puede ser deformado continuamente, lo que permite que éste pueda adoptar muchas formas equivalentes. Las manipulaciones permitidas se establecen por los movimientos de Redemeister.

Se sumerge así la curva en un espacio de tres dimensiones y obtenemos algo nuevo: un nudo. Un nudo es un objeto geométrico que presenta un conjunto de propiedades: simetría, torsión, curvatura, etcétera. Por lo tanto, si la inmersión no es trivial, entonces da lugar siempre a un nuevo objeto geométrico, a un nuevo espacio. La inmersión permite también introducir algo nuevo, que es el espacio complemento del nudo. Una vez que hemos obtenido un nudo, tenemos el nudo como objeto, pero también tenemos todo el espacio interior a él pero que no está contenido en él, es decir, en la curva anudada. Y este espacio complemento, hoy sabemos, juega un papel fundamental para comprender la geometría del nudo y su topología (Figs. 21-22).

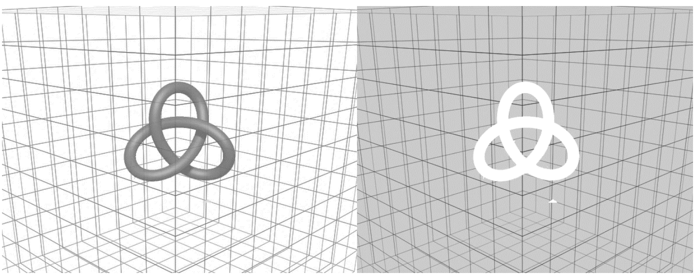


Figura 21. Fuente: Blue Trefoil Knot Animated.gif Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_Trefoil_Knot_Animated.gif Licencia: dominio público. Modificada.

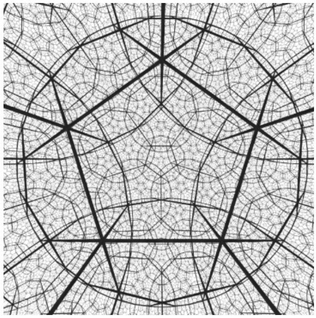


Figura 22. Fuente: Hyperbolic orthogonal dodecahedral honeycomb.png Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hyperbolic_orthogonal_dodecahedral_honeycomb.png Licencia: dominio público. El espacio complemento de algunos nudos y enlaces genera espacios hiperbólicos, como el que vemos aquí.

Entonces, introducimos un nuevo espacio, que es el espacio complemento, pero que no es el espacio ordinario, no es el espacio de la inmersión; es un espacio nuevo que nace de esta inmersión, que se produce a partir de ella. Consideremos otro ejemplo: podemos tomar dos objetos y establecer un agujero que los relacione, que se llama *suma conexa*. Un toro es una superficie de Riemann con un agujero; establecemos una suma conexa entre dos toros y obtenemos un toro de dos agujeros. Sin embargo, un toro de dos agujeros es una nueva superficie de Riemann; ese espacio geométrico posee propiedades geométricas mucho más complejas que el toro mismo, ya que, en lugar de tres clases de homotopías, se tiene un número mucho mayor: en lugar de tres tipos de curvas cerradas, de tres tipos de caminos, se tiene un número mucho más grande, y puesto que esto es así, también se tienen grados de libertad mucho más grandes.

Hay otros ejemplos que muestran que poner en relación dos espacios, dos objetos geométricos, por nociones precisas, como la suma conexa, la inmersión, o la suma conexa, permite producir espacios nuevos que no están dados de antemano, que no están en nuestra intuición intelectiva, sino que son el resultado de una intuición nueva, de una cierta intuición creadora. Es decir, es imaginando que uno puede realizar esta deformación, siguiendo el proceso del interior de ella, que esta deformación produce un nuevo espacio. Pero no está dado en la intuición, no es una forma pura de la intuición; al contrario, es el resultado de un proceso dinámico, de una deformación, para que nazca, para que se produzca un nuevo espacio. Lo anterior, para mí, es un elemento fundamental, que permite comprender que incluso el mundo real es un mundo espacial en transformación permanente. Eso quiere decir que *a priori* no hay ningún objeto que se pueda pensar como estático, fijo, con una geometría que podría ser definida de una vez por todas, como si este objeto no pudiera admitir transformaciones nuevas, deformaciones, cambios de estado, de modos de existencia, manifestar nuevas texturas, formas, propiedades, comportamientos, etcétera. La geometría introduce cierto horizonte, cierto espectro en la visión que tenemos del espacio, porque introduce la posibilidad de que, cualquier objeto considerado geométrico que pueda pasar por ciertos tipos de deformación, pueda obtener nuevas propiedades, nuevas cualidades, nuevos comportamientos. Y estos actúan en la percepción humana, es decir, interactúan por la mediación de la percepción, sobre la existencia humana, y ella es altamente dependiente de la riqueza y la complejidad geométrica y topológica de los objetos que tenemos, incluso en nuestro espacio ordinario.

Es en mi opinión un punto fundamental que se relaciona con el segundo aspecto de tu pregunta. Me parece que permite considerar la síntesis de estos espacios, como una síntesis que no es repetitiva, que no es aditiva, que no es una suma de espacios, no es una repetición de espacios. La síntesis hace interactuar de manera original, singular esos espacios, mostrando que pueden estar religados de una u otra manera y, por tanto, es una síntesis creativa, lo que también podría ser llamado una emergencia. Es una síntesis que se parecería a un surgimiento conectivo entre el espacio y la capacidad que tenemos de introducir operaciones que modifican completamente este espacio. De hecho, esta interacción también se refleja en la existencia humana a través de nuevas dimensiones fenomenológicas. Por ejemplo, si fenomenológicamente considero que un objeto, como una esfera, puede admitir curvaturas cerradas, eso que llamamos asas, y que estas curvaturas cerradas pueden ser anudadas, salimos de la visión ordinaria de la esfera, que en sí misma es ya muy rica (S^2 sumergida en R^3), para repensar completamente la noción de esfera y verla como un objeto que sería posible poner en interacción con otros objetos geométricos. Eso que hace que podamos imaginar una esfera anudada, que es contrario a la intuición empírica, pero no a nuestra intuición imaginativa y creadora, puede concebir muy bien objetos que son contraintuitivos, pero que serían desde un punto de vista matemático, físico y fenomenológico, completamente posibles e incluso completamente reales. De hecho, es necesario que la filosofía haga ese salto, ese paso, la transición de lo abstracto a lo concreto, que haga un esfuerzo capaz de mostrar que las operaciones, aparentemente abstractas en matemáticas, tienen un contenido fenomenológico, concreto y fundamental. Es decir, que este tipo de operaciones, como las deformaciones que hemos mencionado, pueden engendrar nuevos universos fenomenológicos, en los que el hombre podría adquirir nuevas funciones y nuevas capacidades cognitivas y perceptivas. Y en el seno de estas nuevas capacidades cognitivas y perceptivas, la sensibilidad humana, de la cual hablaba Kant, en su *Crítica de la razón pura*, sería un universo mucho más rico y complejo, porque esta sensibilidad tendría integradas varias síntesis espaciotemporales completamente nuevas.

III

ARC —Nos has dado un marco general de cómo llegaste a la topología; también has dado ideas generales sobre la relación entre matemáticas y filosofía. Pero al mismo tiempo, debemos reconocer que la topología tiene muchos sentidos, y corremos siempre el riesgo de equivocarnos, así que debemos precisar a qué nos referimos con el término de topología. Muy a menudo la aproximación que domina es la de la teoría de conjuntos y su idea asociada de recubrimiento del espacio con puntos. Uno piensa en la teoría de conjuntos y cómo definir un espacio, una vecindad, un punto interior, un punto de frontera, un punto exterior, etc., pero, sobre todo, el concepto fundamental de conjunto abierto, que permite un cubrimiento del espacio en cuestión. Pero la idea que tienes de topología, en mi opinión, es más rica. Háblanos de lo que tú piensas acerca de ese concepto.

LB —De hecho, es un concepto muy rico; primero, que posee orígenes lejanos. La etimología misma de la palabra topología muestra que concierne al *topos*, los lugares, al espacio como un lugar en el que no estamos interesados necesariamente en los puntos o la distancia entre ellos. En la topología uno no se preocupa por hacer mediciones, en todo caso, mediciones geométricas. La noción de punto no es necesariamente fundamental, lo que interesa es la relación cualitativa entre las partes del espacio y entre los espacios. Ya hemos dicho cuáles son las primeras nociones topológicas, y que remontan a Leibniz y luego a Euler. Con los números de Euler para el poliedro también se introdujeron consideraciones topológicas al mostrar que hay invariantes topológicas —la invariante de Euler justamente. Pero, como decía, el verdadero nacimiento de la topología tuvo lugar en el siglo XIX. Ahora, es muy importante distinguir los diferentes significados de la palabra *topología*, especialmente porque los filósofos solo conocen uno de ellos, que es el que asimila la topología con la teoría de conjuntos, con la topología de conjuntos.

La topología de conjuntos es una teoría que está basada en la noción de conjunto, y por tanto, en la noción de punto. La teoría de conjuntos fue desarrollada por Cantor y Dedekind, pero sobre todo por Cantor a partir de los años setenta y ochenta del siglo XIX. Es una teoría muy abstracta, cuyas primeras preocupaciones son pensar el espacio como si pudiera ser concebido en términos de un conjunto de puntos. Luego se interesa en saber cuáles son las relaciones entre los conjuntos. Por lo tanto, la topología de conjuntos está esencialmente interesada en determinar los conjuntos de puntos que se pueden definir en un espacio dado. Y desde este punto de vista, el espacio se ve esencialmente como un conjunto de puntos, en el que se define una diversidad de propiedades: continuidad, conectividad, etcétera. Pero esas nociones son definidas a partir de la idea conjuntista de objetos, de puntos. Paralelamente, o casi paralelamente, se desarrollaron dos nociones completamente diferentes de topología. La que nace con Riemann y que se aplica a la esfera, en la que Riemann muestra que, si se toma, por ejemplo, una esfera, ella tiene propiedades geométricas. Por ejemplo: podemos definir la métrica sobre una esfera, calcular la función de la distancia entre dos puntos cualesquiera en ella por desplazamientos infinitesimales. Pero la esfera tiene también propiedades topológicas. Las propiedades topológicas son aquellas que se pueden definir de manera cualitativa y global, es decir, que se refieren tanto a las propiedades generales de un espacio o de un objeto geométrico, y se interesan en poder mostrar las propiedades cualitativas, donde cualitativo significa que no necesitamos recurrir a mediciones sobre objetos puntuales. Es decir, no es necesario introducir la medición de distancia entre los puntos sino, solamente, resaltar las propiedades cualitativas de los objetos. Una de estas propiedades globales, si se piensa aún en la esfera, sería la de borde, de cierre. La esfera es un espacio cerrado, por lo tanto, compacto, pero sin borde; es un espacio con una frontera, es finito, pero no tiene borde. Si tenemos un espacio sin borde, significa que dentro de esos espacios podemos introducir subespacios pertenecientes a ellos. Por ejemplo, si dentro de la esfera corto una parte de ella, o tomo un casquete esférico desde el polo sur hasta el ecuador, tengo un subespacio de la esfera. Si dentro de la esfera introduzco un disco, este disco será en cierta manera un borde de la esfera, un subespacio de la esfera.

Las tres nociones fundamentales que involucran ya la topología en este nivel son la de *borde*, la de *conectividad* y la de *orientabilidad*. Veamos más de cerca lo que significan estas tres nociones. Los espacios se pueden clasificar en espacios sin bordes, como la esfera, como todas las esferas que tienen un límite finito, como todos los espacios que tienen una frontera finita, por ejemplo, un elipsoide, y espacios con borde (Figs. 23-24).

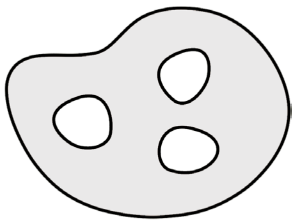


Figura 23. Fuente. Runge theorem.svg Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Runge_theorem.svg Licencia: dominio público. La imagen muestra un espacio conexo, pero de manera no-simple, debido a los agujeros. Los contornos en negro representan el borde del espacio topológico en cuestión.

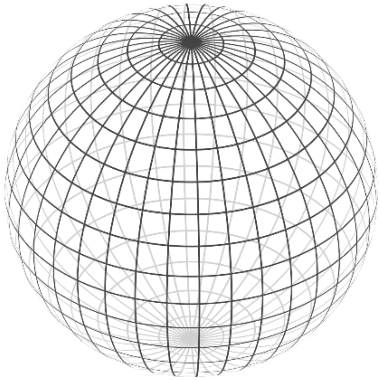


Figura 24. Fuente: Sphere wireframe 10deg 6r.svg Autor: Geek3. Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sphere_wireframe_10deg_6r.svg Licencia: CC BY 3.0 Imagen representando una esfera como superficie (no como un sólido inmerso en el espacio euclidiano de tres dimensiones). Se trata, como se dice en la entrevista, de un espacio finito, pero sin borde. Intuitivamente significa que, si estamos inscritos en ella, no alcanzaremos nunca su fin. Éste es, además, simplemente conexo.

La noción de *borde* es interesante en sí misma, porque permite hacer esta operación de la que hablamos hace un momento, es decir, de imaginar que dentro de un espacio podemos crear otro espacio. La noción de conectividad también es muy importante porque nos permite tener acceso a lo que podría llamarse un grado de complejidad intrínseca en la organización de un espacio. Por ejemplo, la conectividad significa que, dadas dos partes del espacio, se trata de entender cuáles son las posibilidades de vincularlas; de manera más precisa, si tenemos dos puntos en el espacio, en la esfera, por ejemplo, ¿cuáles son los caminos posibles según estos puntos? O si tenemos un solo punto en la esfera ¿cuáles son los caminos posibles que regresan al punto de partida? Es decir que forman un bucle cerrado, de una trayectoria cerrada desde este punto, que parte de él y regresa a él mismo; a ello se llama caminos de homotopía. Entonces, si visualizamos la esfera, notamos que, dado un punto, podemos trazar una infinidad de caminos equivalentes a un punto, es decir un homotopo, de ahí la noción de equivalencia homotópica entre estos caminos.

Por un lado, es muy interesante porque entendemos que podemos tomar varios caminos para regresar al mismo punto, y por otro lado, es bastante trivial y pobre porque introduce la noción de repetitividad y una noción de fijeza. Es decir, cualesquiera que sean los caminos, siempre se regresa al mismo punto, es como si hubiera un punto que tuviera una posición absoluta; podríamos pensar que ese punto sería como el Aleph de Borges, un poco, el secreto del espacio. Todo vuelve a este punto, todo se puede ser conducido a este punto. Es como cuando Cantor pensaba que todo podía ser reducido a la noción de conjunto; y que, a su vez, los números transfinitos, por ejemplo, eran una creación divina. El número transfinito, se sabe, juega un papel fundamental en la teoría conjuntos. Pero si pensamos que hay espacios en donde los caminos no vuelven al mismo punto, que hay varios tipos de bucles cerrados, y que no hay una sola clase de caminos, evidentemente se introduce una noción de conectividad mucho más rica; es decir, que, en lugar de tener un espacio simplemente conectado, como en el caso de la esfera, tenemos espacios que serían muticonexos. Es decir, habría una multitud de caminos posibles, cada uno de estos caminos constituyendo una clase de equivalencia cualitativamente diferente en otra clase de equivalencia. El toro, desde este punto de vista, nos da una imagen mucho más rica. Si tomamos un toro, como habíamos dicho antes, podemos distinguir tres tipos de clases de equivalencias que representan un camino de curvas cerradas cualitativamente diferentes. Es muy importante, porque una de esas curvas es totalmente trivial, es un círculo cerrado, una órbita cerrada que se traza sobre la superficie de la esfera; otra es un bucle que pasa por el disco interior de la esfera y otro, es un bucle que pasa al mismo tiempo por el interior y el exterior del toro (Figs. 25-26).

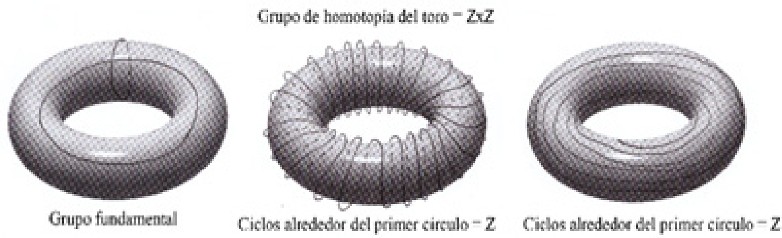


Figura 25. Imagen: Arturo Romero Contreras. Licencia: CC BY-SA 3.0. Podemos ver en la primera imagen el grupo fundamental del toro, compuesto por dos círculos. Si realizamos ciclos alrededor del primer círculo, obtenemos como número el conjunto de los números enteros. Si repetimos la misma operación, pero sobre el otro círculo, entonces obtenemos Z de nuevo. Así, el primer grupo de homotopía resulta ser Z x Z.

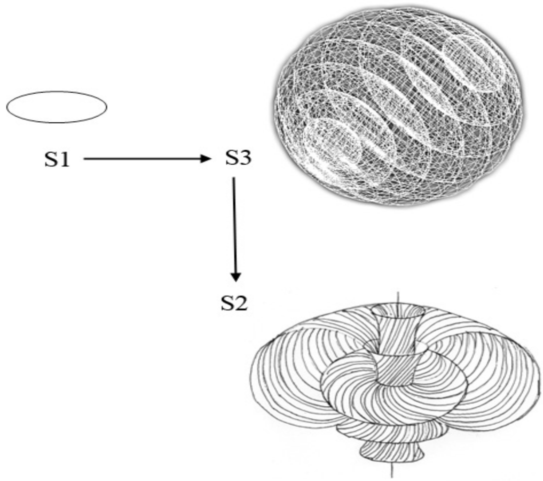


Figura 26. Imagen: Arturo Romero Contreras. Licencia: CC BY-SA 3.0. La 3-esfera (S^3). Fuente: Hypersphere.png Autor: Eugene Antipov. Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hypersphere.pngLicencia: CC BY-SA 3.0. La imagen presenta la fibración de Hopf, un modo de conocer el grupo de homotopía de la 3-esfera (esfera en cuatro dimensiones del espacio euclidiano; ahora, la 3-esfera no puede ser representada en el espacio de tres

dimensiones, por lo que la imagen presentada aquí es ya también una proyección). Un modo de conocer un objeto geométrico *X* consiste en "proyectarlo" en otro objeto Y que se conoce mejor. La fibración es un método que consiste en asignar a cada punto (o conjunto abierto) de un espacio, otro objeto. A partir de ahí se pueden establecer haces, donde los objetos asociados son "pegados" en un espacio más amplio y de naturaleza suave. La fibración de *Hopf* consiste en proyectar la 3-esfera en la 2-esfera a partir de un objeto: la 1-esfera (o intuitivamente, un círculo). Para mapear $S^3 \rightarrow S^2$ se consideran todas las fibras y órbitas de S^1 (círculos) que actúan en S3. De esta manera, cada punto diferente de la 2-esfera es mapeado a un círculo máximo diferente de la 3-esfera. En otros términos: las fibras de la 3-esfera serán entonces círculos, que corresponden a cada punto de la 2-esfera. El objeto que se *produce* es un conjunto de fibras en S^2 que exhibe objetos interesantes, como nudos; además, pueden identificarse objetos como el toro.

Se puede ver que hay un cambio cualitativo de estos trayectos. Esto es fundamental para comprender que un espacio, desde un punto de vista topológico, nunca es igual a nuestro espacio desde un punto de vista cualitativo; eso quiere decir que las propiedades a la vez globales y cualitativas de ese espacio pueden cambiar profundamente.

Otro concepto es el de *orientación*, que es también una noción global, topológica, que introduce una diferenciación cualitativa fundamental en los espacios. Los espacios, en general, se pueden clasificar en dos categorías desde este punto de vista: los espacios orientables y los no-orientables. En los primeros se fija un sentido de orientación privilegiada; todas las superficies regulares, los espacios homogéneos e isotrópicos son orientables. La esfera es orientable, ya sea que fijemos una dirección en el sentido de las manecillas del reloj, o en sentido inverso. Por ejemplo, un cilindro es orientable, los poliedros son orientables, es decir, que, si tenemos un observador, éste puede fijar una orientación privilegiada, que le dará el sentido por el cual podrá realizar todos los desplazamientos en dicho espacio. Y hay también espacios que son no-orientables, por ejemplo, la banda de Möbius, la botella de Klein, el espacio proyectivo complejo y otros espacios aún más complejos, que no mencionaremos aquí, pero hay toda una clase de espacios que no son orientables (Figs. 27-28).

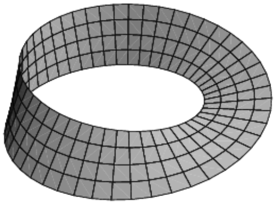


Figura 27. Fuente: MobiusStrip-01.png Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MobiusStrip-01.png Licencia: dominio público.

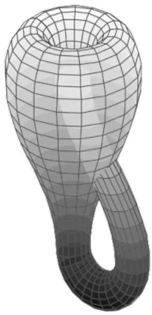


Figura 28. Fuente: Archivo: Klein bottle.svg Autor: Tttrung Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Klein_bottle.svg Licencia: CC BY-SA 3.0

¿Y qué quiere decir que una superficie sea no-orientable? Que no podemos elegir un sentido privilegiado de orientación, significa que, si comenzamos en un punto, no podremos regresar exactamente a él después de haber recorrido, digamos, una curva en este espacio. Para tomar el ejemplo de la cinta de Möbius: se trata de una superficie monolateral que, a diferencia de todos los espacios orientables, está hecha de una sola superficie, y si tomamos un punto sobre esta superficie y recorremos un camino, no volveremos al mismo punto, sino que regresaremos a él, pero con el sentido de orientación invertido. ¿Por qué pasa eso? Porque este espacio tiene la característica de tener una torsión; esta torsión modifica, invierte el sentido de la orientación. Es decir, introduce una pluralidad de orientaciones posibles.

ARC —Podemos arrojar flechas y explorar el espacio de la cinta.

LB —Exactamente, si quieres podemos verlo a partir de la noción, por ejemplo, de *fibrado*: si el ángulo es siempre tangente al fibrado, por ejemplo, un disco, significa que el espacio es orientable. Si, por el contrario, el plano tangente en un momento dado cambia y ya no es tangente a la curvatura, es que el sentido de la orientación ha cambiado en el curso de la curva. Este es un concepto cualitativo, ya que cambia la posición del observador en este espacio e introduce nuevos grados de libertad para observar los fenómenos. Eso significa que no hay un sentido privilegiado, por ejemplo, un solo grado de libertad (Fig. 29).

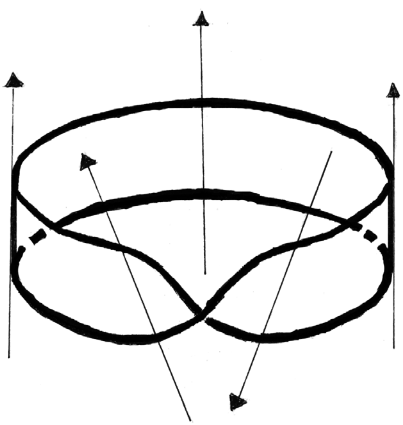


Figura 29. Imagen: Arturo Romero Contreras. Licencia: CC BY-SA 3.0. Banda de Moebius con un fibrado de rectas tangentes a un círculo central. Aquí solamente se representan cinco líneas para ver el cambio de dirección de las flechas, lo que indica que este objeto topológico es no-orientable.

ARC —Por hablar, por ejemplo, del paso continuo del interior al exterior.

LB —Así es, podríamos movernos del interior al exterior. Uno podría imaginar que, si tomamos, por ejemplo, la botella de Klein, donde uno va del exterior al interior, en esta operación, el sentido de la orientación puede cambiar. Pero lo importante es que esta no-orientabilidad del espacio proviene de una propiedad geométrica intrínseca del espacio, que es la torsión. Una torsión es a lo que se llama una doble curvatura; como Gauss ya lo demostró, un espacio puede caracterizarse por una curvatura intrínseca. Una curvatura es una cantidad interna a la superficie que permite caracterizar su desviación, su distancia con respecto a la geometría euclidiana. Cuanto más se curve un espacio, más se alejará, se desviará de su carácter euclidiano. No obstante, la torsión agrega algo nuevo a la curvatura, porque el espacio, digamos, experimenta un cambio de fase. Esto es, la tensión se realiza siempre sobre un ángulo y eso se traduce en una media vuelta que puede repetirse hasta convertirse en un giro, en varios giros, etc. Así que, entre más torsiones de medio giro se efectúen alrededor de su eje central, vertical u otro eje, más *torcido* será el objeto.

Un objeto torcido tiene una geometría cualitativamente diferente en relación con un objeto que no lo está. Por ejemplo, si tomamos, para ir a otro campo, la arquitectura, una columna no-torcida, entones una columna lineal, vertical no posee la misma geometría, la misma estructura que aquella. La torsión modifica la distancia entre las líneas, entre los puntos, cambia el aspecto de las curvas generadoras de la torsión (Figs. 30-33).

Figura 30. Fuente: Archivo Twisted columns of Orvieto Cathedral.jpg Autor: Wittylama. Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Twisted_columns_of_Orvieto_Cathedral.jpg Licencia: CC BY-SA 4.0

Figura 31. Fuente: Archivo Aix Cathedral Cloister Twisting Column.jpg Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aix_Cathedral_Cloister_Twisting_Column.jpg Licencia: dominio público.

Figura 32. Archivo Santo Domingo de silos, columna curiosa.JPG Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sto_Domingo_de_silos,columna_curiosa.JPG Licencia: dominio público.

Figura 33. Fuente: Archivo StSeverinPillar.jpg Autor: Stephen Lea. Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:StSeverinPillar.jpg Licencia: CC BY-SA 3.0. En la imagen podemos apreciar varios ejemplos de columnas con torsión.

Así, estas tres propiedades que he mencionado [conectividad, orientabilidad y torsión] son cualitativas, es decir, cambian la estructura cualitativa del espacio y su forma global, cualitativa, lo que quiere decir que es la forma global del espacio la que cambia. Porque si introduzco un borde, cambio la forma global del espacio. Cuando estudio un espacio no-orientable es su forma la que, mientras tanto, ha cambiado, su forma global. Por ejemplo, la botella de Klein no es orientable, porque no puede ser sumergida en R^3 sino en R^4, de tal modo que en R^3 habría una singularidad, un nudo que aparece, que surgiría y que impediría la visualización de su inmersión en R3, es decir, podríamos hacerlo y obtendríamos un espacio con una singularidad.

Para mí esta visión de la topología, que se ha desarrollado sobre todo en el seno de la topología algebraica y de la topología diferencial, es fundamental porque modifica completamente nuestra visión del espacio, en el sentido de que podemos pasar de un cierto espacio, con cierto tipo de propiedades globales cualitativas a otro espacio que tiene propiedades cualitativas diferentes. Es como si, de alguna manera, pudiéramos mostrar que un espacio no es únicamente un objeto que puede ser cuantificado, medido, definido en términos de una entidad geométrica local, sino que también puede ser definido, caracterizado, en términos de propiedades globales, propiedades cualitativas internas de su forma. Y la forma es algo que cambia radicalmente nuestra visión y perspectiva del espacio. Ningún filósofo, en realidad, se interesó por la forma del espacio, la forma global del espacio, al menos en el siglo XIX, incluso en el siglo XX. No se ha reflexionado sobre la importancia filosófica, hasta donde yo sé, que puede tener este concepto de formas cualitativas, de forma global, desde un punto de vista filosófico. El interés filosófico es múltiple, en este contexto topológico. El primer interés reside en que podemos vivir en un espacio en el cual las propiedades métricas permanecen iguales, pero en el cual las propiedades cualitativas cambian; y eso, evidentemente, tiene consecuencias, por ejemplo, en la fenomenología del espacio, en la percepción del espacio.

Un espacio con borde no se percibe del mismo modo que uno sin borde; un espacio no-orientable no se percibe, no se realiza en nuestra experiencia de la misma manera que cuando integramos un espacio orientable. La noción de no-orientabilidad introduce un nuevo nivel de articulación en nuestra relación fenomenológica concreta con el espacio, porque nos lleva, de algún modo, a encontrar nuevas orientaciones posibles, nos hace conscientes de que este espacio ha conocido un cambio cualitativo, nos hace darnos cuenta de que este espacio ha sufrido un cambio de estado, y sobre todo, nos hace tomar conciencia de que estas transformaciones cualitativas del espacio son el resultado de un proceso dinámico, es decir algo que implica una operación dinámica, no una operación formal. Ciertamente, después se puede traducir en un lenguaje formal, pero el interés no reside en la operación formal en sí misma, sino en ver qué hay detrás de ésta, lo cual es una operación dinámica en cuestión que siempre implica una deformación, una transformación, un cambio, como dijimos, de conectividad, de orientabilidad, etcétera.

Filosóficamente esto es muy importante, porque nos permite darnos cuenta de que podemos pasar de un espacio orientable a un espacio no-orientable y que podemos movernos, digamos, en nuestra existencia, de un espacio simplemente conexo a un espacio multiconexo y que no hay contradicciones en ese pasaje. Es decir, la existencia humana también puede desarrollarse tanto en un espacio simplemente conexo, como de una manera mucho más rica y compleja, desde un punto de vista perceptual, cognitivo y estético, de cierta manera, en un espacio multiconexo. Es en esta noción de topología en la que, en mi opinión, los filósofos tendrían el interés de profundizar, porque también nos permite relacionar las ciencias sociales o la arquitectura, con el arte.

En la arquitectura podemos concebir ciertos espacios como multiconexos. Imaginemos una ciudad: si la estructura de una ciudad es perfectamente ortogonal, si todas las calles de una ciudad son perfectamente ortogonales entre sí, se tiene una estructura cartesiana relativamente simple. Si en una ciudad tenemos, digamos, caminos que siempre se repiten, no es muy interesante desde el punto de vista de la exploración de la ciudad. Si en una ciudad tenemos espacios siempre acabados sin creación de nuevos subespacios en ellos, es que evidentemente hay una falta de creatividad, de imaginación en esta ciudad, creatividad de nuevos espacios, de nuevos lugares, de nuevas articulaciones, nuevas interacciones. Entonces creo que las nociones de topología cualitativa son muy importantes para repensar la noción, por ejemplo, del espacio habitado de una ciudad o en otro lugar o en otra dimensión (Fig. 34).

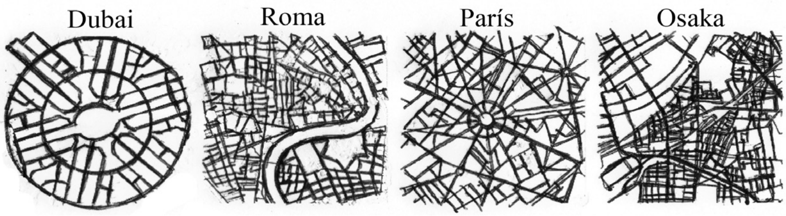
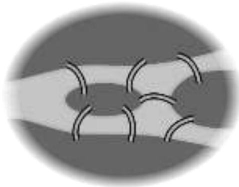


Figura 34. Reproducción de cuatro ejemplos de diagramas sobre la forma de algunas ciudades importantes del mundo, según Geoff Boeing. International Journal of Information Management. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.ijinfomgt.2019.09.009

ARC —Permanezcamos en el ejemplo de la ciudad; me parece muy interesante y muy sorprendente, ya que, de hecho, la estructura de la ciudad está ligada a la experiencia vivida y a la forma de habitar en general, pero ¿hay algo así como agujeros en una ciudad? Una noción que me parece de especial importancia en tu trabajo es la limitación (*contrainte*); *esto es, has hablado del papel fundamental que juega un agujero en un espacio, eso significa que se vuelve mucho más rico, más interesante, porque los posibles caminos en éste nos dan un mayor grado de libertad, pues es más complejo y por lo tanto más rico. Uno podría pensar, uno podría imaginar, que un agujero* *es como un obstáculo, una restricción; uno no puede ir más allá o recorrerlo, pero, por otro lado, esta imposibilidad hace posible más caminos. En la ciudad hay monumentos, centros que no están directamente habitados, pero que desempeñan el papel de un lugar alrededor del cual uno se desplaza. Eso significa que hay restricciones en la ciudad, pero que no deben ser consideradas como imposibilidades en un sentido negativo, sino positivo. Así que, ¿podrías hablarnos un poco acerca de esta noción de restricción relacionada o no con la ciudad?*

LB —Sí, esta articulación es absolutamente fundamental para comprender el vínculo entre la visión topológica cualitativa del espacio y la visión cualitativa en la fenomenología del espacio habitado o vivido. La idea en topología es la siguiente: si tenemos una superficie de Riemann, que es un objeto geométrico complejo, muy rico, maravilloso, sorprendente también, por sus diferentes propiedades, la idea básica es que cuantos más agujeros se introducen en esta superficie, más rica y compleja se vuelve. Particularmente, la multiconexidad de la superficie hace a este objeto, que es un espacio, más complejo. No es sólo el grado de complejidad que ha aumentado, sino la caracterización cualitativa de esta complejidad. Es la complejidad intrínseca del espacio la que ha cambiado. Entonces, el agujero en realidad no es un obstáculo, no es en absoluto lo que podríamos llamar una obstrucción topológica; esta obstrucción topológica, en lugar de tener el papel de evitar, de obstáculo, de hecho, se convierte en una restricción virtual, es decir, comporta nuevas propiedades en el espacio mismo (Fig. 35-37).

→



→

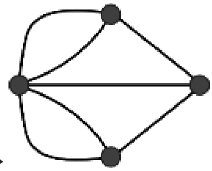


Fig. 35 Figura 36. Figura 37.

Figura 35. Fuente: Konigsberg bridges.png Autor: Bogdan. Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png Licencia: CC BY-SA 3.0.

Figura 36. Fuente: 7 bridges.svg Autor: Chris-Martin. Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:7_bridges.svg Licencia: CC BY-SA 3.0.

Figura 37. Fuente: Königsberg graph.svg Autor: Riojajar~-commonswiki Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:K%C3%B6nigsberg_graph.svg Licencia: CC BY-SA 3.0. Aquí se representa el problema de los siete puentes de Königsberg, resuelto por Euler y que dio origen a la teoría de grafos, una parte de la topología. La pregunta es la siguiente: ¿se puede recorrer toda la ciudad (cuatro segmentos de tierra) pasando una sola vez por cada puente y regresando al mismo punto de inicio? La respuesta puede formularse por medio de un grafo que asigna un punto (vértices) a cada pedazo de tierra y una línea (arista) a cada puente. Se muestra así la conectividad de la ciudad. Resulta que, si el número de aristas que unen los vértices es impar, entonces no es posible realizar ciclos, es decir, recorridos circulares, como pide el problema. Como puede verse, en este problema no hay métrica, no se trata de un asunto de distancias, sino de la conectividad del espacio y los trayectos que éste permite.

Hemos visto que la conectividad es una noción fundamental de la topología cualitativa, que permite caracterizar globalmente un espacio por su relación con otro. Así que este agujero, de hecho, permite un conjunto de operaciones muy importantes, y sabemos bien que a partir de este agujero se puede, por ejemplo, introducir nociones como las que mencioné anteriormente: la de *suma conexa*, la de *adjunción*, la de *conexidad*, etcétera. No hay que olvidar que el número de agujeros está directamente relacionado con el número de parámetros y con el número de estados posibles de un fenómeno físico. Si, por ejemplo, tomamos un sistema dinámico y está todo definido a partir de este espacio, un sistema dinámico que pudiera trazar varios tipos de órbita, este espacio, sería un sistema dinámico con propiedades mucho más ricas que, por ejemplo, una pirinola, que trazaría un único modo simple de movimiento (Figs. 38-39).

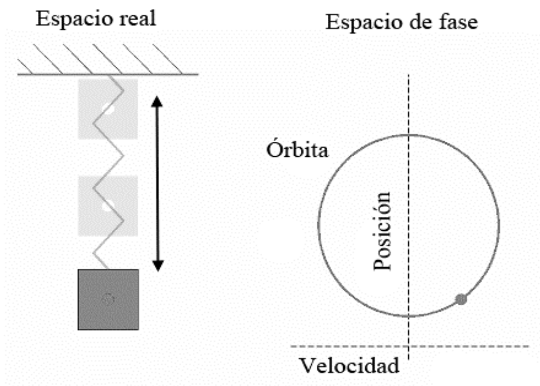


Figura 38. Fuente: Simple Harmonic Motion Orbit.gif Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simple_Harmonic_Motion_Orbit.gif Licencia: dominio público. La imagen muestra, a la izquierda, un objeto cuadrado que pende de un resorte, y que se mueve de arriba abajo (como si rebotara), todo ello en nuestro espacio ambiente usual (euclidiano, de tres dimensiones). El movimiento va de arriba abajo y presenta momentos de aceleración y desaceleración. A la derecha se encuentra el diagrama de su *espacio de fase* como sistema dinámico. El espacio de fase incluye todos los estados posibles del sistema. El círculo en el diagrama representa el movimiento periódico del objeto cuadrado: subir y bajar (posición en el eje vertical) y el cambio de velocidad (en el eje horizontal). El círculo constituye la órbita del sistema.

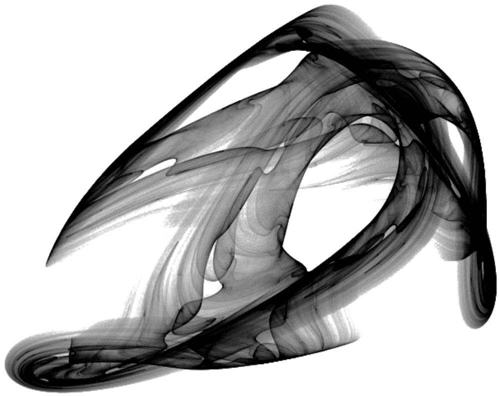


Figura 39. Fuente: Attractor Poisson Saturne.jpg Autor: Nicolas Desprez. Disponible en: https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en Licencia: CC BY-SA 3.0. Imagen de un sistema con un atractor extraño. Los atractores extraños están presentes en la teoría de los sistemas dinámicos y muestran los puntos o regiones hacia las cuales tienden dichos sistemas en largos periodos de tiempo. Los sistemas caóticos no son predecibles (para nosotros) de manera mecánica, determinista, pero a largo plazo exhiben comportamientos estadísticamente regulares que pueden ser representados muchas veces por espacios topológicos.

Pero la articulación debe también hacerse con el espacio de una ciudad, un espacio habitado, en el cual están involucradas nuevas dimensiones, como la fisiológica, psíquica, cognitiva, estética y de otro tipo. ¿A que podría equivaler el agujero de una superficie de Riemann en una ciudad? ¿Cómo pensarlo, cómo conceptualizarlo? Imaginemos una ciudad en la que hubiera muy pocas plazas, jardines y fuentes en esas plazas o espacios verdes, parques, monumentos, museos, etcétera. Pero tomemos sobre todo las plazas y los espacios verdes. Una ciudad con muy pocos espacios verdes y muy pocas plazas sería un objeto, una superficie de Riemann, un objeto geométrico, topológico, relativamente simple, relativamente lineal, monótono y poco rico en términos de experiencia humana. Ahora, imaginemos que en esta ciudad hay muchas plazas; por cierto, antiguamente se pensaba que la plaza era un lugar donde tenía lugar la vida real de los hombres, donde se desarrollaba la complejidad de la vida humana, porque es donde se interactuaba, hablaba, discutía, en donde se conocía a otras personas, etcétera. Ahora bien, se introducen muchas plazas y muchos espacios verdes en la ciudad, es como si asimiláramos estos espacios verdes, este espacio, al agujero. Entonces, dichos espacios, estos lugares, no serían obstáculos, sino son espacios específicos que enriquecen la ciudad con una geometría y una topología cualitativamente más más rica y mucho más compleja en comparación con una ciudad en la que no las hubiera. Si tomamos, por ejemplo, una ciudad en donde las calles se organizan, se estructuran de una manera perfectamente perpendicular, formando una especie de retícula ortogonal, es poco interesante. Si tomamos, en cambio, una ciudad en la que hubiera varios tipos de orientación en las calles, en los pequeños caminos, en las callejuelas, y varias orientaciones, al mismo tiempo, en un subespacio de esta ciudad y, al mismo tiempo, en cada una de estas callejuelas, imaginemos, habría una plaza, un espacio verde, un centro cultural, un lugar de juego, etcétera, es obvio que esta estructura de la ciudad, que esta organización geométrica de la ciudad, adquiere una topología cualitativa muy importante desde el punto de vista de la fenomenología, desde el punto de vista de la vida de las personas. Es decir, que la riqueza y la complejidad topológica en la organización de la ciudad, se traduciría inmediatamente en una riqueza y complejidad en la vida de las personas y en los vínculos entre los modos de vida.

Pienso que una ciudad debe alejarse de una geometría puramente cuantitativa, es decir, donde sólo estamos interesados en la definición de las distancias entre puntos o en la optimización de los tiempos de viaje, olvidando todo lo demás. El modo de orden en esta geometría sería el de una optimización del tiempo y las distancias y de los caminos por recorrer.

Esto, en el fondo, traería consigo un empobrecimiento importante de la vida y de la dimensión fenomenológica en esta ciudad. Lo que hay que hacer es introducir singularidades, como esos lugares de los que hemos hablado: plazas, jardines y centros culturales, lugares de arte, monumentos, que, al singularizar topológicamente la ciudad, al introducir una multiplicidad de lugares diferentes, se contribuiría a crear una multiplicidad de modos de vida, de percepciones, de puntos de vista y de relaciones. Las ciudades más pobres son aquellas en las que el espacio no es esencial para la vida de las personas, donde el espacio es siempre igual a sí mismo, donde los cafés son siempre iguales a sí mismos, donde los jardines se hacen de la misma manera, donde los lugares son rectangulares, euclidianos, circulares, donde no hay ninguna singularización en el nivel geométrico, topológico, y, por lo tanto, fenomenológico. Así pues, la riqueza y la complejidad de la existencia humana, y la posibilidad de entrelazar esas experiencias, proviene precisamente, de la riqueza topológica de la ciudad, en la articulación y la capacidad de introducir singularidades en esta estructura. Por ello, creo que tenemos que volver a una concepción múltiple, rica y plural de la ciudad, en la que se reinventa el espacio, se reinventa completamente la concepción geométrica que subyace a su arquitectura para multiplicar, enriquecer y pluralizar los modos de vida, los modos de existencia, y así enriquecer la experiencia humana en esta ciudad.

Recomendamos a los lectores deseosos de profundizar en ciertos aspectos filosóficos y matemáticos relacionados con los conceptos fundamentales de espacio y espacio-tiempo desarrollados especialmente en los siglos XIX y XX, los siguientes libros y artículos más relevantes de Luciano Boi:

Boi, Luciano (1992). “The ‘revolution’ in the geometrical vision of space in the nineteenth century, and the hermeneutical epistemology of mathematics”. En D. Gillies (ed.). *Revolutions in Mathematics*. Óxford: Clarendon Press, pp. 183-208.

___________ (1994). "Mannigfaltigkeit und Gruppenbegriff. Zur den Veränderungen der Geometrie im 19. Jahrhundert". *Mathematische Semesterberichte*, vol. 41, núm. 1, pp. 1-16.

___________ (1995). *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*. Preface de René Thom. Hiedelberg/Berlín : Springer/Verlag.

___________ (2005). *Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition*. Singapur: World Scientific.

___________ (2006). "The Aleph of Space. On some extension of geometrical and topological concepts in the twentieth-century mathematics: from surfaces and manifolds to knots and links". En G. Sica (ed.). *What is Geometry?* Milán: Polimetrica Inter. Sci. Publ., pp. 79-152.

___________ (2006). "Mathematical Knot Theory". *Encyclopædia of Mathematical Physics*, vol. 3, J.-P. Françoise, G. Naber, T. S. Sun (eds.). Óxford: Elsevier, pp. 399-406.

___________ (2006). "From Riemannian Geometry to Einstein's General Relativity Theory and Beyond: Space-Time Structures, Geometrization and Unification". En J.-M. Alimi & A. Füzfa (eds.). *Proceedings Albert Einstein Century International Conference*. Melville: American Institute of Physics, pp. 1066-1075.

___________ (2009). "Ideas of geometrization, geometric invariants of low-dimensional manifolds, and topological quantum field theories". *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 6, núm. 5, pp. 701-757.

___________ (2011). *Morphologie de l'invisible*. Limoges : Presses Universitaires de Limoges.

___________ (2011). *The Quantum Vacuum. The Geometry of Microscopic World, from Electrodynamics to Gauge Theories and String Program*. Baltimore: The John Hopkins University Press.

___________ (2011). "When Topology Meets Biology for Life. The Interaction Between Topological Forms and Biological Functions". En C. Bartocci, L. Boi, C. Sinigaglia (eds.). *New Trends of Geo-*

metry. Their Interactions with the Natural and the Life Sciences. Londres: Imperial College Press, pp. 243-305.

___________ (2012). *Pensare l'impossibile: dialogo infinito tra scienza e arte*. Milán: Springer/Verlag, Milano.

___________ (2016). "Imagination and Visualization of Gometrical and Topological Forms in Space. On Some Formal, Philosophical and Pictorial Aspects of Mathematics". En O. Pombo & G. Santos (eds.). *Philosophy of Science in the 21st Century – Challenges and Tasks*, *Documenta* núm. 9. Lisbon: Editions of CFCUL, pp. 28-54.

___________ (2019). "Some mathematical, epistemological and historical reflection on space-time theory and the geometrization of theoretical physics, from B. Riemann to H. Weyl and beyond". *Foundations of Science*, vol. 24, núm. 1, pp. 1-38.

___________ (2019). "H. Weyl Deep insights into the mathematical and physical worlds. His important contribution to the philosophy of space, time and matter". En C. Lobo & B. Julien (eds.). *Weyl and the Problem of Space*. Basel: Springer, pp. 231-263.

*

Alexandroff, P. (1961). *Elementary Concepts of Topology*. Nueva York: Dover Publications.

Connes, A. (june 2010). "A View of Mathematics". París : Institut des Hautes Etudes Scientifiques.

___________ (7 novembre 2017). "Un topo sur les topos". Texte de la conférence donnée dans le cadre du séminaire "Lectures grothendieckiennes". París : Ecole Normale Supérieure.

Gromov, M. (2000). "Space and Questions". En N. Alon *et al.* (eds.). *Visions in Mathematics*, *GAFA*, *Geom. Funct. Anal.*, Special Volume, Part I., pp. 118-161.

Hilbert, D. & Cohn-Vossen, P. (1999). "Geomery and Imagination". Americal Mathematical Society [First German edition, *Anschauliche Geometrie*, Springer-Verlag, Berlín, 1932].

Manin, Yu (1981). *Mathematics and Physics*. Boston: Birkhäuser.

Poincaré, H. (1902). *La science et l'hypothèse*. París : Flammarion.

___________ (1913). "Pourquoi l'espace a trois dimensions?". *Dernières pensées*. París : Flammarion.

Prasolov, V.V. (1995). *Intuitive Topology*. American Mathematical Society. Providence.

Riemann, B. (1990). "On the Hypotheses Which Lie at the Bases of Geometry". *Collected Mathematical Works*. S. Chandresekhar (Introduction). Nueva York/Leipzig: Springer/Teubner [Habilitatioschrift, Göttingen, 1854].

Rolfsen, D. (1976). *Knots and links*. Berkely, CA.: Publish or Perish.

Thom, R. (1977). *Stabilité structurelle et morphogenèse*. París : Inter Editions.

___________ (1980). "Topologie et signification". *Modèles mathématiques de la morphogenèse*. París : C. Bourgois.

Thurston, W.P. (1997). *Three-Dimensional Geometry and Topology*, vol. 1. Princeton: Princeton University Press.

___________ (1998). "How to see 3-manifolds". *Classical and Quantum Gravity*, vol. 15, núm. 9, pp. 2545-2571.

Weeks, J.R. (1985). *The Shape of Space*. Nueva York: Marcel Dekker.

Weyl, H. (1949). *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*. Princeton: University Press.