Avatares de la forma II.
Tópicos del Seminario, 43.
Enero-junio 2020, pp. 65-92.

La visión categórica de la lógica

Jorge Alberto Herrera Hernández
Universidad de Barcelona

> *Philosophically, it may be said that these developments supported the thesis that even in set theory and elementary mathematics it was also true as has long been felt in advanced algebra and topology, namely that the substance of mathematics resides not in Substance, as it is made to seem when 2 is the irreducible predicate, but in Form, as is clear when the guiding notion is isomorphism-invariant structure, as defined, for example, by universal mapping properties.*
>
> William Lawvere

Introducción

Argumentar es un acto mediato de la razón para cerciorarse de la certeza de alguna afirmación. Es necesario argumentar para convencer de la verdad o falsedad de una proposición. La construcción de argumentos que defienden o refutan afirmaciones es una actividad constante en cualquier campo del conocimiento. Sin embargo, ¿cómo estar seguros de que un argumento —por más coherente que parezca— es correcto?, ¿bajo qué criterios se puede validar una concatenación de razones que pretenden defender o refutar una idea? Contestar estas preguntas no resulta ser una tarea trivial y en el intento por resolver estos problemas surgió la lógica como disciplina desde tiempos de la filosofía griega.

Pero no fue hasta que la matemática enfrentó estas cuestiones que se definieron criterios *formales* y precisos para determinar la validez de argumentos de distinto grado de complejidad, extendiendo con ello las preocupaciones de la lógica. Dado un sistema de principios bajo los cuales queremos deducir alguna proposición en un cierto dominio de conocimiento, ¿cómo estar seguros de que esos principios bastan para deducirla?, ¿cómo saber si estos principios no generan contradicciones?, ¿qué quiere decir que una proposición sea verdadera en ese dominio de conocimiento? Estas preguntas (y muchas más) también conformaron el saber lógico y fueron contestadas mediante herramientas matemáticas una vez que la lógica se integró al pensamiento matemático. En todo ello, el concepto de forma resulta central.

Con el surgimiento de la teoría de categorías en la matemática, la lógica ha alcanzado nuevos niveles de análisis y de entendimiento de multitud de conceptos (validez, consistencia, completitud, verdad, etc.) y al formalizar sus herramientas de estudio con el lenguaje categórico (los conectivos y cuantificadores como funtores adjuntos, los sistemas formales como categorías en sí mismos, etc.), la lógica, del mismo modo que muchas áreas de la matemática, ha encontrado similitudes y conexiones importantes entre sus conceptos y problemas propios y conceptos e ideas de muy diversas áreas de la matemática, facilitando con ello su comprensión.

En este artículo pretendemos esbozar brevemente el desarrollo experimentado por la lógica a partir de su incorporación al saber matemático, con la finalidad de exponer sucintamente la manera en que la teoría de categorías se relaciona con los problemas lógicos. Pasaremos revista al surgimiento del pensamiento categórico dentro de la matemática, para llegar finalmente a resumir cómo es que los conceptos lógicos adquieren mayor claridad y experimentan una completa unificación dentro del saber matemático mediante el uso del lenguaje de la teoría de categorías.

Este escrito está pensado para despertar mayor interés en el lector hacia la lógica categórica. No pretendemos elaborar un tratamiento exhaustivo de todos los temas aquí mencionados, ni ahondar en los problemas que aquí se mencionan. Remitimos a la bibliografía para la lectura exacta y pormenorizada de cualquier detalle que en este escrito no se encuentre desarrollado.

1. El papel de la lógica dentro de la matemática

Durante los siglos XIX y XX, la matemática prolifera y florece como nunca antes. Desde la geometría hasta el cálculo, se desarrollan ideas nuevas y se resuelven viejos problemas, se sistematizan los saberes acumulados y aparecen nuevas teorías que pretenden explicar diferentes fenómenos. Surgen las geometrías no euclidianas (Torretti, 1978) y con ello se prepara el terreno para la futura y no lejana reflexión acerca del método axiomático empleado por los matemáticos para deducir y responder sus preguntas y afirmaciones. Motivados por la misma riqueza de sus invenciones, muchos matemáticos comienzan a reflexionar sobre la naturaleza y el alcance de su actividad. Comienzan por reflexionar acerca de la naturaleza de un postulado (axioma) y sobre el conjunto de proposiciones que se deducen a partir de un sistema de axiomas.

En la geometría sucede quizá el ejemplo más claro que motiva estas reflexiones. Desde que Euclides sistematizara el saber geométrico en un conjunto de postulados a partir de los cuales todas las proposiciones de la geometría son deducidas, se pensaba que un sistema axiomático definía unívocamente su objeto de estudio. Además, se consideraba que los postulados de un sistema tal eran verdaderos por la simpleza y autoevidente verdad con la que eran enunciados. Un axioma es verdadero, porque resulta evidente que debe serlo. Sin embargo, desde su formulación, el quinto postulado de Euclides ya despertaba suspicacias. La versión más popular de este postulado establece que dada una recta L y un punto p fuera de ella, por p pasará una única recta paralela a L (Figura 1).

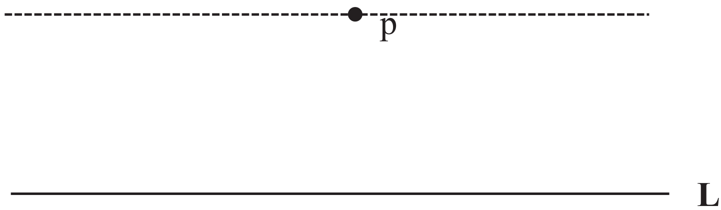

Figura 1.

Pero si cambiamos el espacio sobre el que se trazan la recta y el punto (no necesariamente un plano), podría ponerse en duda la verdad de dicha afirmación (¿cómo serían las rectas paralelas trazadas en una esfera?, ¿y en un espacio en forma de trompeta?) (Figura 2).

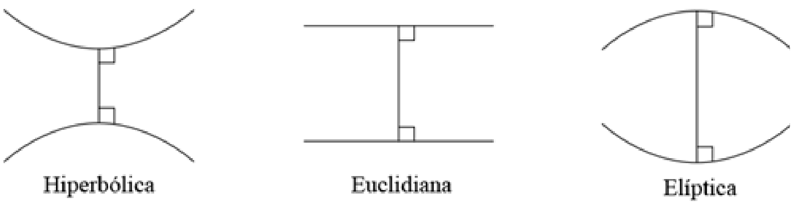

Figura 2. Fuente: Archivo Noneuclid.svg:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Noneuclid.svg
Licencia: CC BY-SA 3.0

A partir de estas preguntas se desarrollan geometrías que no satisfacen el quinto postulado. Consecuencia de esto es la reflexión acerca del método axiomático y de la validez de los axiomas, así como la pregunta por las condiciones que debe satisfacer uno de estos sistemas para que pueda dar respuesta a las preguntas que involucran a sus objetos de estudio.

A continuación, surge la teoría de conjuntos, que con su particular interés en el estudio del infinito matemático (Tiles, 1989) generó una serie de paradojas que condujeron a la necesidad de su axiomatización, con la finalidad de eliminar contradicciones inherentes al estudio intuitivo del infinito. Una vez más aparece la cuestión de la naturaleza de un sistema axiomático, de la verdad de sus postulados y de la necesidad de evitar contradicciones dentro del sistema. En particular, será ahora el axioma de elección, formulado por Zermelo en su temprana axiomatización de la teoría de conjuntos, el que genere suspicacias y preguntas que remitirán a las antes suscitadas por el quinto postulado, y que desembocarán en la necesidad de responder a problemas de carácter más bien lógico, revelados todos ellos a partir de axiomatizar una teoría (la independencia de este axioma en relación a los otros axiomas de la teoría, la consistencia del sistema entero, su completitud, etc.).

Un sistema axiomático S (es decir, un conjunto de axiomas y sus consecuencias) se dice que es *completo* cuando para cada proposición p acerca de su dominio de conocimiento (escrita en su lenguaje formal) ocurre que, o bien p se puede deducir a partir de los axiomas de S, o no-p (negación de p) se puede deducir a partir de esos mismos axiomas. Esto es, un sistema axiomático es completo cuando no deja pregunta (correspondiente a su dominio de conocimiento) sin respuesta. Con su ayuda pueden deducirse todas las cuestiones pertinentes. Todas las cuestiones planteadas en un sistema formal completo se pueden responder. Un sistema axiomático S es *consistente* si y sólo si para ninguna proposición p acerca de su dominio de conocimiento, sucede que tanto p como no-p se pueden deducir a partir de S. Es decir, un sistema es consistente si no genera contradicciones a partir de sus axiomas. Una proposición p de un sistema axiomático S se dice que es *independiente* si y sólo si no es posible deducir p a partir de las demás proposiciones que conforman a S.

Para efectos de una mejor comprensión, nos permitiremos una breve digresión ilustrativa: Supongamos que tenemos interés en el comportamiento de todos los pájaros de un bosque. Notamos primero que para cualesquiera pájaros x e y existe un pájaro Pxy. Consideremos el siguiente conjunto de axiomas:[1]

> Dados dos pájaros cualesquiera x e y, valen los siguientes axiomas:
> *Axioma 1:* si y canta un día dado, entonces Pxy canta ese día.
> *Axioma 2:* si x no canta un día dado, entonces Pxy canta ese día.
> *Axioma 3:* si el pájaro x y el pájaro Pxy cantan *ambos* un día dado, entonces y canta ese día.
> *Axioma 4:* para todo pájaro x, existe un pájaro y tal que y canta en los días en los que Pxy canta y sólo en esos días.

Ahora preguntémonos, este sistema de cuatro axiomas que trata de los días en que los pájaros de un bosque cantan, ¿es completo?, es decir, ¿podemos a partir de él contestar todas las preguntas sobre los días en que cantan los pájaros del bosque? Ahora bien, ¿será consistente?, esto es, ¿no ocurre que a partir de esos cuatro axiomas se pueda deducir una proposición y también su negación? Fin de la digresión.

Las preguntas por la consistencia, completitud y verdad en los sistemas axiomáticos de la matemática llevaron a los matemáticos a sistematizar la lógica, así como los lenguajes de proposiciones y de predicados en los que las teorías matemáticas son formalizables, para poder responder con claridad esas preguntas. Con ello, la lógica clásica (entendida como el estudio de la relación de consecuencia entre proposiciones) queda formalizada primero en el nivel de los conectivos lógicos y después en el de los predicados y cuantificadores. Se comienzan a desarrollar los primeros cálculos lógicos que tienen por objetivo deducir todas y sólo las verdades lógicas, para que cuando las teorías

---

[1] Este sistema está tomado del libro *Bosques curiosos y pájaros aristocráticos* del matemático Raymond Smullyan (2002). Recomiendo ampliamente la lectura del libro citado, en él el lector encontrará diversos problemas que beneficiarán su comprensión de estos asuntos.

matemáticas sean formalizadas en esos cálculos, las preguntas concernientes a su consistencia y completitud sean resueltas con claridad y en el más puro estilo del pensamiento matemático. De esta forma, conceptos tales como el de consecuencia lógica o el de verdad de una proposición (ideas fundamentales en la reflexión lógica) quedan definidos con toda la claridad y con el rigor del aparato matemático.

Los matemáticos fueron incorporando la reflexión lógica a su quehacer, y con la idea de eliminar cualquier suspicacia acerca de los sistemas axiomáticos de la matemática, David Hilbert consideró fundamental alcanzar una prueba de la consistencia y completitud de cualquiera de estos sistemas. Era necesario entonces comenzar por preguntarse si el sistema axiomático de la aritmética (formalizado en algún cálculo lógico) es consistente y completo. La sorpresa fue mayúscula cuando el matemático Kurt Gödel probó (Nagel y Newman, 2007) que cualquier cálculo lógico que formalice la aritmética necesariamente es incompleto, es decir, para cada uno de estos sistemas puede efectivamente construirse una proposición en su lenguaje que no pueda deducirse ni refutarse a partir de sus axiomas, con lo cual, siempre habrá proposiciones que establezcan hechos aritméticos que no podrán ser probadas ni refutadas con ayuda de los axiomas y reglas de inferencia de estos sistemas, sin importar la manera en que formalicemos la aritmética.

A partir de todo esto se da la completa incorporación de la lógica al pensamiento matemático. Cuestiones como las anteriores motivaron la formalización y la clarificación de conceptos tales como inferencia, consecuencia lógica, verdad en un sistema formal, consistencia, etc., pues el estudio de las teorías matemáticas y de su alcance y potencia explicativa requería de conceptos manejables en el marco de estas ideas. En consecuencia, la reflexión lógica (ahora ya formalizada y echando mano de herramientas matemáticas como la teoría de conjuntos) comienza a avanzar en nuevas direcciones. Los conceptos lógicos empiezan a ser tratados con el rigor de una idea matemática y esto conduce a la lógica hacia nuevos horizontes. Ahora se puede tratar con mayor claridad la cuestión de la bivalencia en la lógica clásica, así como también la idea de contradicción. Con esto surgen las lógicas llamadas “no clásicas” (Priest, 2008), y se principia a estudiar nuevas formas de validar razonamientos (nuevas formas de consecuencia lógica) que sean más fieles a la manera en que se razona en la vida cotidiana.

2. Surgimiento de la teoría de categorías

Una parte importante de la belleza y aplicabilidad de una idea matemática recae en el hecho de su enorme grado de abstracción. Las ideas matemáticas suelen tener ese carácter; no hacen referencia a algún objeto en particular sino que pretenden abarcar una gran gama de objetos bajo un mismo concepto; de esta manera es que conforman un pensamiento abstracto. Para decirlo informalmente, el pensamiento matemático no pretende comprender solamente algún universo conceptual, digamos, sino que intenta entender la estructura de ese universo, con la intención de comparar, clasificar y explicar todos los universos que hay. Esto requiere diversos niveles de abstracción.

Es lícito pensar que la matemática entera está constituida por diferentes teorías según el objeto de estudio del que se trate. Se comienza por plantear un problema que involucre cierto objeto previamente definido (ecuaciones, figuras geométricas, funciones, etc.), y para resolverlo es necesario tener conocimiento del objeto en cuestión, lo que conlleva una sistematización de este conocimiento y la consecuente creación de una teoría bien delimitada. De esta forma, se tiene la teoría de grupos (cuyos objetos son los grupos y los homomorfismos (funciones que preservan estructura de grupos), la teoría de anillos, los espacios vectoriales, la topología, etc., cada una de las cuales intenta resolver sus propios problemas relacionados con sus objetos de estudio correspondientes. Sin embargo, la sistematización del saber matemático mediante teorías y áreas de estudio bien delimitadas no fue algo que se hiciera desde un principio. Los conceptos matemáticos (tales como los grupos, los anillos, los espacios topológicos, etc.) son una constante construcción del pensamiento creativo de la matemática. Es decir, si pensamos en la moderna teoría de grupos, o en la topología actual, se debe tomar en cuenta que durante mucho tiempo una gran cantidad de grupos diferentes o de espacios topológicos distintos fueron estudiados de manera individual, antes de que los conceptos actuales (generales y mucho más abstractos) de *grup*o o de *espacio topológico* fueran formulados tal como los conocemos hoy.

Uno de los ejemplos más ilustrativos de este procedimiento proviene nuevamente de la geometría. Durante el siglo XIX, con el surgimiento de las geometrías no euclidianas y otras formas de pensamiento geométrico, la geometría se desarrolló y floreció como una especie de árbol extremadamente complejo cuyas ramas no se relacionaban y estaban perfectamente separadas unas de otras. La geometría proyectiva sobre el plano complejo, la geometría euclidiana, la geometría hiperbólica, elíptica y descriptiva, etc., eran ramas que rara vez se conectaban y que tenían su propia agenda de problemas por resolver. El árbol de la geometría parecía crecer en diferentes direcciones, conformando un universo de complejidad insospechada y cuyos alcances eran inimaginables. Las conexiones entre todas esas formas del pensamiento geométrico estaban lejos de ser claras. Más aún, en algunos casos esas conexiones parecían no existir. Se tenía la impresión de que, por ejemplo, la geometría proyectiva era completamente incompatible con cualquier geometría que estuviera basada en la idea de *métrica* (o distancia). Existía la polémica acerca de cuál debería ser el mejor método de tratar los problemas que estuvieran relacionados con el espacio y sus propiedades. Por un lado, algunos matemáticos creían que el método analítico-algebráico era el indicado, mientras que otros pensaban que solamente un enfoque sintético podría ser fiel a la esencia de los objetos geométricos.

En 1872, el matemático alemán Felix Klein (1893) formuló el Programa Erlangen para la geometría, cuyo principal objetivo era unificar esos diferentes métodos geométricos bajo un principio general que capturara y facilitara la comprensión de lo que realmente es el objeto de estudio de la geometría. La clave de la unificación consistió en encontrar algunas propiedades intrínsecas a los diferentes espacios geométricos que pudieran ser codificadas mediante un mismo lenguaje matemático, independientemente de los detalles particulares de cada geometría. Klein descubrió que cada geometría es el estudio de ciertas propiedades de las figuras que no cambian cuando se les aplica un tipo de transformaciones. En consecuencia, cada geometría queda determinada por las propiedades invariantes bajo esas diferentes transformaciones. Hablar de una geometría en particular es, en esencia, hablar de un conjunto de transformaciones que preservan propiedades importantes de las figuras geométricas. Más aún, esas transformaciones tienen estructura de grupo bajo la operación de composición entre transformaciones, con lo cual, la noción de grupo captura la naturaleza de la geometría. Descubrimiento fundamental. Ahora es posible clasificar las diferentes geometrías, encontrar similitudes entre ellas e incluso descubrir que muchos conceptos que en apariencia no estaban relacionados, en realidad no son más que casos particulares de conceptos más generales.

La teoría de categorías representa el siguiente nivel de abstracción. Una vez constituidas las diferentes teorías matemáticas según el tipo de objeto que se esté estudiando, se comienza por notar que hay similitudes entre muy diferentes objetos de la matemática. Existen propiedades, conceptos o relaciones que parecen cumplirse o representarse en muy distintos campos, independientemente del tipo de objeto del que se trate. De esta forma, en vez de atender las cualidades intrínsecas de los objetos matemáticos, mejor se agrupan en *categorías* según su diferente naturaleza y se repara en aquellas propiedades que pueden definirse para todos (o casi todos) los objetos matemáticos por su recurrente aparición en muy distintos campos (geometría, álgebra, análisis matemático, etc.).

Puede decirse que la teoría de categorías surgió dentro de la tradición matemática iniciada por el pensamiento de Felix Klein. Surge como una manera de estudiar y caracterizar diferentes tipos de estructuras matemáticas en términos de las *transformaciones* que admiten.

La noción general de *categoría* proporciona una caracterización de la noción de *transformación que preserva la estructura* y de este modo de especies de estructuras que admiten tales transformaciones. El pensamiento categórico (es decir, el que hace uso de la teoría de categorías) se caracteriza por estudiar objetos matemáticos con independencia de su naturaleza. No intenta descubrir las propiedades fundamentales de tales objetos por medio del estudio de sus elementos o de sus partes, más bien se fija esencialmente en las relaciones (*morfismos*) que esos objetos tienen con otros de igual o distinta naturaleza, en las construcciones (*funtores*) que puede hacer entre esos objetos y las relaciones entre tales construcciones (transformaciones naturales).

Para la teoría de categorías no existen los conjuntos, o los grupos, o los anillos (por lo menos no como para la matemática sin categorías), lo que hay simplemente son objetos, una especie de conjuntos "abstractos" que no son definidos por sus elementos y para los cuales nada se sabe por medio de las propiedades individuales e intrínsecas de sus partes. Los objetos son agrupados en categorías, y ahí se estudian sus diversas propiedades. Esas propiedades siempre son establecidas mediante morfismos que no hacen alusión al tipo de elementos que conforman a estos objetos. Todas las propiedades de estos conjuntos "abstractos" son establecidas como consecuencia de las características que la categoría que los agrupa posee. Una categoría, entonces, queda definida mediante dos clases (en el sentido conjuntista) y una ley de composición. Una clase cuyos elementos se conocen simplemente como *objetos* y otra cuyos elementos son llamados *morfismos* y que sirven para relacionar los objetos de esa categoría. Estos morfismos obedecen una ley de composición que puede ser pensada como una generalización de la operación que determina a un monoide. Mediante estos tres elementos, todo objeto matemático (o casi todo) es agrupado en alguna categoría que de alguna manera resume las propiedades más esenciales que poseen los objetos que comparten su misma naturaleza.

Definición: Una *categoría* C es una triple (Ob(C), Mor(C), o) donde:

- Ob(C) es una clase cuyos elementos se llaman C-objetos.
- Mor(C) es una clase cuyos miembros son llamados C-morfismos.

Para cada morfismo f existen C-objetos dom(f) y cod(f) llamados *dominio* y *codominio* de f. Escribimos f: A→B para indicar que A=dom(f) y B=cod(f).

- "o" es una ley de composición definida sobre los elementos de Mor(C) que satisface:

1. Dados dos morfismos f: A→B y g: B→C, es decir, cod(f)=dom(g) existe un morfismo g o f: A→C llamado *composición* de f con g.
2. Para cada objeto A, existe un morfismo : 1_A : A→ A llamado morfismo *identidad* para A que satisface: f o1_A= f y o g=g, para cualesquiera morfismos f y g.
3. Para todo f: A→B, g: B→C y h: C→D se cumple que h o (g o f)=(h o g) o f.

Algunos ejemplos de categorías son:

Set: Objetos, todos los conjuntos. Morfismos, todas las funciones entre ellos.
Grp: Objetos, todos los grupos. Morfismos, todos los homomorfismos entre grupos.
Ab: Objetos, todos los grupos abelianos. Morfismos, todos los homomorfismos entre ellos.

Rng: Objetos, todos los anillos. Morfismos, todos los morfimos de anillos.
Mod-R: Objetos, todos los módulos izquierdos sobre el anillo R y funciones lineales entre ellos como morfismos.
Vect: Objetos, todos los espacios vectoriales. Morfismos, transformaciones lineales entre ellos.
Top: Objetos, todos los espacios topológicos. Morfismos, funciones continuas entre ellos.
CPC (Cálculo Proposicional Clásico): Objetos, todas las fórmulas bien formadas mediante la gramática del lenguaje. Morfismos, todas las deducciones entre fórmulas.

Definición: Sean C y D categorías. F: C→D es un *funtor* de C en D si satisface:

- Para cada objeto A en Ob(C), F(A) es un objeto en Ob(D).
- Para cada morfismo f: A→B en Mor(C), $F(f)$: F(A)→F(B) es un morfismo en Mor(D).
- F preserva la composición: Si f: A→B y g: B→C son morfismos en Mor(C), entonces $F(g \circ f)=F(g) \circ F(f)$.
- F preserva identidades: Para todo objeto A en Ob(C), se cumple que $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Algunos ejemplos cásicos de la noción de *funtor* son el funtor *conjunto potencia* P:Set → Set y el funtor que *olvida* U: Rng→Ab. El primero asocia cada conjunto X con su conjunto potencia P (X) (conjunto formado por todos los subconjuntos de X) y cada función f con la función P (f) que manda a cada subconjunto de X con su imagen bajo f. El segundo asocia cada anillo R (conjunto con dos operaciones) con el grupo abeliano de R (nos olvidamos de una operación y consideramos a R sólo con la operación que lo hace grupo abeliano).

Una de las aplicaciones más importantes de los funtores es que con ellos es posible clasificar conceptos matemáticos y en particular determinar los conceptos básicos de un campo de la matemática en específico. Los funtores pueden ser pensados como una manera de "traducir" problemas dentro de un dominio del conocimiento matemático en otro completamente diferente. A veces esto nos permite comprender más sobre el problema en cuestión, y en algunas ocasiones puede facilitarnos la respuesta. De hecho, existen funtores que tienen un comportamiento muy especial de tal manera que para ellos existe otro funtor que es capaz de "traducir" nuevamente (regresar a la teoría original) el problema de interés; esto se conoce como una *adjunción* entre funtores. Es decir, mediante un funtor en esencia traducimos una situación o una construcción hecha en un dominio de conocimiento (por ejemplo, la teoría de grupos abelianos) a otro campo matemático (por ejemplo, la teoría de R-módulos); si para ese funtor existe una especie de "inverso" (o una traducción de vuelta a la categoría original), entonces decimos que tiene funtor *adjunto* y será posible traducir construcciones hechas o problemas planteados en el lenguaje de una teoría a otro lenguaje de otra teoría distinta.

El concepto de funtor adjunto es el núcleo de la teoría de categorías y constituye uno de los aportes fundamentales de esta teoría al pensamiento lógico. Las adjunciones entre funtores aparecen en todos los campos de la matemática, desde la lógica hasta la geometría. Los funtores adjuntos capturan las nociones de propiedad universal y funtor representable. En muchas ocasiones las adjunciones entre funtores traducen construcciones muy complejas dentro de una teoría en construcciones elementales dentro de otra. En cierto sentido, construcciones matemáticas significativas dentro de una teoría se convierten en trivialidades dentro de otra (un ejemplo de esto es la adjunción que existe entre el funtor que *olvida* U: Grp→Set y el funtor *grupo libre* F: Set→Grp).

Esta forma de pensar ha revelado una gran cantidad de similitudes existentes entre objetos matemáticos de muy diversa naturaleza (espacios de todo tipo, estructuras algebraicas, lógica, etc.); en muchos casos se ha comprobado que las diferentes construcciones hechas en distintos campos de la matemática son simplemente casos particulares de nociones categóricas bien definidas. La utilidad de la teoría de categorías para facilitar la comprensión de fenómenos matemáticos diversos y para unificar multitud de conceptos en la matemática ha quedado manifiesta. Las propiedades estructurales más importantes de una gran cantidad de objetos matemáticos a menudo son expresadas en lenguaje categórico, específicamente como propiedades universales. Entre los conceptos que admiten una descripción universal se encuentran, por ejemplo, los números naturales, el conjunto potencia de un conjunto, el producto cartesiano, el producto libre, el producto tensorial, la compactación de Stone-Čech, los conectivos lógicos y los cuantificadores. Todos estos conceptos tienen una definición mediante una adjunción entre funtores adecuados. Desde un punto de vista categórico, estos conceptos son esencialmente la misma operación. No deja de llamar la atención el hecho de que muchas ideas matemáticas de fundamental importancia puedan ser definidas mediante adjunciones entre funtores. Es pertinente la pregunta por la naturaleza de este concepto. ¿Por qué una gran cantidad de construcciones fundamentales hechas en muy distintos campos de la matemática y la lógica, en última instancia, no son más que adjunciones?, ¿es este un fenómeno *epistemológico*?, es decir, ¿un hecho sobre nuestra forma de comprender los fenómenos matemáticos? Más aún, ¿es este un fenómeno *ontológico*?, ¿una propiedad acerca de lo que son en realidad los objetos matemáticos?

Era de esperar que los fundamentos de la matemática y la lógica que los estudia también pasaran por el agudo punto de vista de la teoría de categorías. Es así que surge la idea de estudiar lógica con categorías, pero más importante, surge la idea de estudiar aquello que fundamenta la matemática (la teoría de conjuntos) mediante herramientas de carácter puramente categórico. Con esta preocupación en mente, matemáticos de la talla de Lawvere (2009) o McLane & Moerdijk (1992), se involucraron en la tarea de investigar cuáles eran las propiedades más elementales de los conjuntos y de las funciones, para poder llevarlas al lenguaje de la teoría de categorías y con ello descubrir estructuras de naturaleza muy diferente a los conjuntos pero que comparten esas propiedades. Encontraron un viejo concepto que años atrás ya había descubierto Alexander Grothendieck[2] para sus propios intereses (la geometría algebraica). Se trataba del concepto de *Topos*. En él hallaron la herramienta esencial que permitía formalizar en un lenguaje enteramente categórico las propiedades fundamentales que satisfacen los conjuntos y las funciones (la categoría Set) y que son indispensables para la construcción de todo el aparato matemático. En este sentido, los *Topos* son "generalizaciones" de la teoría de conjuntos, pues satisfacen todas las propiedades esenciales de Set, pero no tienen necesariamente conjuntos como objetos ni funciones como morfismos. Más aún, mediante este concepto se lleva a un lenguaje categórico toda la lógica que carga la teoría de conjuntos, la lógica clásica.

Esto los condujo a la idea de la fundamentación de la matemática por medios únicamente categóricos, teniendo siempre en mente el tratar de sortear las dificultades acarreadas por las diferentes fundamentaciones de carácter conjuntista. Resultó que las categorías con estructura de *Topos* eran de naturaleza muy variada; no obstante, los teóricos arribaron a descubrimientos importantes en el terreno de la lógica y efectuaron las primeras pruebas categóricas de independencia.

Sin duda, la realización de pruebas de este tipo cimentadas en la noción de *Topos* facilitó enormemente la tarea emprendida por los investigadores, e hizo de dichas pruebas verdaderas obras de arte, pero a costa de un esfuerzo que algunos tildan de exagerado, pues para que las pruebas de independencia y la fundamentación de la matemática puedan desarrollarse de manera unificada y mediante herramientas categóricas, es necesario antes llevar a cabo una compleja labor de abstracción.

---

[2] Para un itinerario del trabajo de Grothendieck, remitimos al lector a su texto autobiográfico titulado "Réflexiones et témoignage sur un passé de mathématicien" (1986). Se trata de un manuscrito inédito pero disponible en la red, y el cual ha tenido un gran influjo dentro y fuera de la matemática.

De esta forma se comienza a estudiar lógica por medio de herramientas categóricas. Los típicos problemas lógicos y sus conceptos ahora son trasladados al lenguaje categórico con la intención de comprender su verdadera naturaleza mediante la comparación y el establecimiento de relaciones entre estas ideas con otras muy diferentes dentro de la matemática. Los conectivos lógicos se estudian como morfismos; los cuantificadores ahora serán funtores adjuntos, y la relación de consecuencia lógica quedará enteramente capturada por la naturaleza del así llamado *clasificador de subobjetos* en un *topos*. De esta forma, los conectivos lógicos, los cuantificadores, los cálculos lógicos y la noción de *consecuencia lógica* encuentran una "traducción" dentro del potente lenguaje de la teoría de categorías y, por tanto, todos estos conceptos satisfacen también los importantes resultados obtenidos dentro de esta teoría.

3. La estructura de *Topos*

La palabra *topos* ("lugar" o "sitio" en griego) fue originalmente usada por Alexander Grothendieck en el contexto de la geometría algebraica. Él definió una noción llamada *gavilla* sobre un espacio topológico. La colección de gavillas sobre un espacio topológico forma una categoría. Grothendieck y sus colegas extendieron esta construcción remplazando el espacio topológico por una estructura categórica más general. El concepto resultante, llamado *categoría de gavillas*, recibió el nombre de *topos*.

Independientemente de esto, F. William Lawvere se planteó el problema de establecer las condiciones que una categoría debe satisfacer para ser "esencialmente la misma" que Set (categoría cuyos objetos son conjuntos y los morfismos, funciones entre conjuntos). Su primera respuesta fue publicada en 1964 (*An elementary theory of the category of sets*). Estos ensayos fueron escritos con la intención de axiomatizar categóricamente la teoría de conjuntos. Un defecto de su trabajo era que una de las condiciones que estableció estaba dada en términos teórico-conjuntistas, con lo cual el resultado no fue satisfactorio. En 1969, Lawvere (junto con Myles Tierney) comenzó el estudio de ciertas categorías que tienen un tipo especial de morfismo, llamado *clasificador de subobjetos* (brevemente, se trata de una categorización de la correspondencia entre subconjuntos y funciones características en Set). Esta noción resultó ser la clave para el problema planteado antes. Lawvere y Tierney descubrieron todos los *topos* de Grothendieck que tienen clasificador se subobjetos. De todo esto resultó el concepto de *Topos elemental*, formulado enteramente en el lenguaje de la teoría de categorías y de manera independiente a la teoría de conjuntos. Posteriormente, Mitchell y Cole dieron una respuesta completa y clara a la pregunta originaria, y con ello se estableció que un *topos* elemental es en cierto sentido equivalente a Set**.** La teoría de *topos* es un mundo en sí mismo. Es matemáticamente rica, intrincada y multifacética.

Una de las propiedades más importantes, desde un punto de vista lógico, de los conceptos que hemos tratado aquí es su enorme poder unificador. La gran potencia que el lenguaje categórico posee recae enteramente en la capacidad que tiene de unificar conceptos que en apariencia no se encuentran relacionados. El concepto de *topos* representa el punto más elevado de esta unificación: es al mismo tiempo topológico, geométrico, aritmético y lógico. Surge como el intento más audaz de comprender la naturaleza esencial del concepto de espacio, pero sus propiedades matemáticas conducirán al descubrimiento de que un *topos* también captura la lógica interna de una teoría o un sistema deductivo. Desde un punto de vista matemático, lo que hace interesante esta diversidad es el hecho de que cualquier idea o intuición que se tenga en el nivel de la teoría de *topos* se puede trasladar a un dominio cualquiera de la matemática que tenga esa estructura. Desde la geometría a la aritmética, desde la lógica hasta la topología.

La primera noción que se intenta categorizar dentro de la teoría de *topos* es la relación "ser parte de". ¿Qué quiere decir que un concepto abarque una parte del dominio de otro?, ¿qué representa realmente que una propiedad sea una subpropiedad de otra? Por supuesto, en teoría de conjuntos estas preguntas conducen a la noción de *subconjunto*. Nos fijamos en los elementos que son abarcados por el primer concepto, los agrupamos en un conjunto mediante las propiedades que tengan en común y después determinamos cuáles satisfacen nuevamente la segunda propiedad, cayendo de esta forma dentro del dominio del segundo concepto. Como todo dentro de la teoría de conjuntos, partimos del estudio de los elementos de un agregado (las propiedades que poseen, el número de elementos que satisfacen esas propiedades, etc.) para formar más conjuntos que a su vez se relacionan. Puede decirse que en este nivel se lleva a cabo un análisis combinatorio.

En un *topos* es posible representar la relación "ser parte de" como una propiedad abstracta, es decir, sin poner atención en los elementos de un objeto. Más bien nos fijamos en los morfismos que llegan a ese agregado; si esos morfismos tienen una propiedad algebraica bastante sencilla de resumir (que sean cancelables por la izquierda), entonces puede decirse que constituyen una "parte" de ese objeto, pues la correspondencia que establecen refleja fielmente la idea de "estar contenido" dentro de un agregado. El análisis ha sido desplazado, ya no interesan los elementos de un objeto ni su cantidad, tampoco las propiedades que cumplan esos elementos, ahora el interés recae en las relaciones que ese objeto tenga con otros de su misma naturaleza (o incluso otra distinta) establecidas mediante morfismos que cumplen propiedades algebraicas. Puede considerarse que ahora lo que se hace es un análisis estructural. Las ventajas de este enfoque para unificar diferentes conceptos es notable, pues al no hacer referencia a los elementos de un objeto y prestar atención únicamente a las relaciones establecidas entre ellos, una variedad muy diversa de distintas construcciones verifican la relación "ser parte de", anteriormente definida sólo para elementos y conjuntos.

Definición: Sea D un objeto en la categoría C. Un *subobjeto* de D es un monomorfismo (el equivalente categórico al concepto de función inyectiva) f: A→D con codominio D.

En la teoría de conjuntos la noción de subconjunto conduce al concepto de conjunto *potencia* de un conjunto dado. No es más que la colección conformada por todos los subconjuntos de él. Es posible establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto potencia de un conjunto y la colección de todas las funciones que van de ese conjunto al conjunto de valores de verdad {0,1}; estas funciones se llaman funciones *características*. De esta manera, hablar de subconjuntos de un conjunto se reduce a hablar de funciones cuyos valores solamente pueden ser 0 o 1. Básicamente, vamos reconstruyendo las partes de un conjunto dado mediante funciones que asignan valores de verdad. Nuevamente un análisis combinatorio. Sin embargo, si nos olvidamos de los elementos de un conjunto y nos fijamos en que esas funciones características son morfismos entre un objeto y un conjunto de valores de verdad (que además tiene estructura de álgebra de Heyting) que cumplen una propiedad universal (la de producto fibrado), daremos el paso a un nivel de análisis lo suficientemente abstracto para que el conjunto de valores de verdad esté conformado por más de dos elementos (básicamente cualquier álgebra de Heyting) y podamos hablar de *morfismos característicos* y *objetos potencia* en general, sin considerar únicamente conjuntos, funciones y sólo dos valores de verdad. Esto es en esencia el concepto de *clasificador de subobjetos.* Otra vez un análisis en términos de estructura.

Definición: Sea C una categoría con objeto terminal 1. Un *clasificador de subobjetos* para C es un par $(\Omega,\top)$ donde Ω es un objeto de la categoría C y $\top$: $1\to\Omega$ es un morfismo en C que satisface la siguiente condición: Para cada monomorfismo f: A→D existe un único morfismo $\chi_f : D\to\Omega$ de tal manera que $\chi_f \circ f = \top \circ 1_A$.

De esta forma, se habla de un *Topos* como una teoría de conjuntos generalizada, pues en él encuentran una traducción al lenguaje de las categorías toda una gama de conceptos fundamentales para la teoría de conjuntos (y la matemática en general), pero sin interesarse en conjuntos y en funciones necesariamente. La idea básica es que una categoría de conjuntos es pensada como aquella que satisface ciertas transformaciones (conocidas como límites finitos) que en particular rescatan la relación "parte-todo". Esto conduce al descubrimiento de que muchos más objetos matemáticos, incluso algunos que pudieran parecer extraños o muy complejos, tienen una estructura similar a la categoría de conjuntos y funciones. Objetos de muy diversa naturaleza pueden hacer las veces de teoría de conjuntos, con lo cual, la típica idea de construir todo el universo matemático haciendo uso únicamente de conjuntos y funciones pierde su importancia habitual.

Definición: Un *topos elemental* es una categoría E que es cerrada cartesiana y tiene un clasificador de subobjetos.

Desde un punto de vista epistemológico, las diferencias entre la teoría de conjuntos y la teoría de categorías son notables y significativas. En un marco conjuntista el universo matemático es construido a partir de átomos. Elementos mediante los cuales formamos conjuntos que a su vez servirán para formar conjuntos nuevos cuando los agrupamos recurrentemente. Tenemos en este enfoque un universo de tipo "cono" en donde si queremos conocer un conjunto, es necesario conocer sus elementos así como las propiedades que satisfacen y que fueron usadas para agruparlos. A partir de unos pocos principios es posible deducir todo el universo matemático.

En un enfoque categórico, conocer un objeto es conocer la forma en que se relaciona con otros y las construcciones que podemos hacer con ellos. Dentro de este marco tenemos un universo en forma de "espacio", donde las diferentes categorías no son jerarquizadas ni se fundamentan unas en otras, sino más bien agrupan distintos dominios del conocimiento matemático. Se trata de un universo de universos, en donde lo que más importa es comprender los distintos fenómenos matemáticos y encontrar similitudes entre conceptos que en apariencia podrían ser muy diferentes. Las propiedades de un dominio cualquiera (categoría) se establecen mediante propiedades de funtores entre categorías, que son en esencia morfismos universales que corresponden a funtores adjuntos.

4. La lógica en la teoría de categorías

¿Qué relación guarda el enfoque categórico de la matemática con la lógica?, ¿la teoría de categorías tiene algo que ofrecer al estudio de los problemas que interesan a esta ciencia?, más aún, ¿es posible que la potencia del lenguaje categórico revele también hechos importantes desde un punto de vista lógico?

El interés primario de la ciencia lógica es determinar la validez de un razonamiento. Cuando los matemáticos se involucraron en la tarea de demostrar la validez de sus razonamientos, todas las nociones lógicas fueron definidas de forma precisa y el estudio de la lógica se convirtió en una tarea más de la propia matemática. La lógica, de esta forma, quedó integrada en esta ciencia, con sus propias preocupaciones y teorizaciones. De esta manera, el paulatino enfoque categórico inevitablemente terminaría por incluirla. Ésta, desde su incorporación al saber matemático, se ha encargado fundamentalmente de desarrollar, introducir y analizar sistemas formales y sus propiedades, por medio de los cuales se estudian las diferentes teorías matemáticas y, sobre todo, la validez de ciertas afirmaciones hechas dentro de esas teorías. Comienza por desarrollar lenguajes formales con la potencia suficiente para formalizar las proposiciones matemáticas. Después vienen los conceptos de sistema formal y verdad dentro de uno de tales sistemas, sintaxis y semántica de los lenguajes que formalizan los universos de la matemática. Y así se abre todo un mundo de posibilidades. Diferentes sistemas, diferentes axiomas, distintos lenguajes y valores de verdad. Todo un universo lógico para analizar los razonamientos matemáticos y más. La lógica así estudiada permite resolver casi todas las dudas acerca de la validez de un razonamiento cualquiera, incluso los que no guardan ninguna relación con la matemática o aquellos cuyas afirmaciones puedan aceptar más de dos valores de verdad.

No hay duda acerca de que la teoría de categorías tiene algo que ofrecer al pensamiento lógico. Fundamentalmente, clarificación y entendimiento de sus conceptos, pues al resultar que mediante el uso del lenguaje categórico las nociones lógicas no son más que ejemplos particulares de conceptos que abarcan una variedad de ideas muy grande, se accede a una mayor comprensión de ellas. Cuando se descubre que ideas que provienen de campos muy diferentes y que se creía que no tenían relación alguna (o incluso que ni se pensaba en relacionarlas) en realidad son ejemplos de conceptos más generales que las abarcan, se ha dado un paso muy importante en el entendimiento de los fenómenos que esas ideas describen. De esta forma, la lógica categórica no es más que el estudio de los clásicos problemas lógicos haciendo uso ahora del lenguaje categórico. Los sistemas lógicos de cualquier tipo ahora son entendidos como categorías a los que se les puede aplicar toda la gama de teoremas ya probados dentro de la teoría. Los cálculos de la lógica clásica, la lógica intuicionista, la lógica modal, de la relevancia, multivaluada, el cálculo lambda, etc., son asociados con categorías que pueden tener diferentes estructuras: categorías cartesianas, localmente cerradas, *topos* booleanos, *topos* de Grothendieck, etc., de manera tal que es posible obtener resultados importantes para tales sistemas (por ejemplo, completitud, consistencia relativa, independencia) mediante la sencilla aplicación de algún teorema de la teoría de categorías. En cada caso es posible definir funtores entre teorías de algún tipo e investigar invariancia entre sus propiedades. De la misma manera en que el programa de

Klein abrió la puerta a la comparación sistemática entre sistemas geométricos, descubriendo con ello relaciones profundas entre geometrías que en apariencia eran incompatibles, la teoría de categorías y la lógica categórica proporcionan las herramientas algebraicas (estructurales) para llevar a cabo una tarea similar entre los sistemas deductivos. El lenguaje categórico posee una excepcional claridad y potencia para realizar este propósito.

El concepto fundamental de *topos* quizá sea la herramienta más importante de la lógica categórica. Como hemos mencionado antes, la noción de *topos* surge primero dentro de la escuela de Grothendieck con intereses en geometría algebraica como la generalización de un espacio topológico. Sin embargo, uno de los aspectos más fascinantes de un *topos* es la relación que guarda con la lógica. En virtud de la asociación que en un *topos* existe entre suobjetos y morfismos mediante la condición del clasificador de subobjetos, el objeto Ω que conforma a ese clasificador puede ser considerado como un objeto de "valores de verdad". Un morfismo que llega a Ω, digamos $\varphi\colon \mathrm{E} \to \Omega$, es entonces una "función proposicional" que se extiende a un correspondiente subobjeto $f\colon \mathrm{U}_{\varphi} \rightarrowtail E$. Ahora tenemos subobjetos asociados a valores de verdad. Esto permite una interpretación de la lógica de primer orden en cualquier *topos*, pues además se puede definir en él los cuantificadores lógicos como funtores adjuntos a productos fibrados. En consecuencia, entre más estructura tenga el *topos* en cuestión, la interpretación lógica puede llegar a ser muy rica. Por ejemplo, combinando el hecho de que un *topos* es una categoría cerrada cartesiana con las propiedades del clasificador de subobjetos Ω, podemos obtener una construcción natural de lógicas de orden superior, con existencia de cuantificación sobre predicados y relaciones.

En la medida en que los conceptos de la lógica son llevados al lenguaje de las categorías, éstos encuentran similitudes con objetos matemáticos provenientes de universos conceptuales totalmente distintos. Con ello no sólo se unifica la diversidad de ideas matemáticas, sino que se privilegia su comprensión. En esto consiste el procedimiento natural de la razón para comprender fenómenos que en un principio no se tienen claros. Comparar ideas diferentes, encontrar similitudes entre conceptos de áreas muy distintas y proceder a estudiarlos como manifestaciones particulares de fenómenos más generales son pasos naturales que conducen a la comprensión de un hecho en particular. Como en muchas áreas de la matemática, los problemas lógicos pueden ser traducidos, mediante el lenguaje categórico, dentro de alguna teoría matemática en la que encuentren solución o en la que se trivialicen, beneficiando con ello su entendimiento.

La lógica estudiada mediante la teoría de categorías ha permitido obtener una serie de resultados de fundamental importancia para diversos sistemas deductivos, demostrando con ello que la aplicación del lenguaje categórico a los problemas de carácter lógico resulta ser ampliamente fructífera. Algunos ejemplos de esto se han dado principalmente en el campo de las pruebas de independencia. Demostrar la independencia de una afirmación matemática con respecto a los axiomas de la teoría a la que esta afirmación pertenece, en esencia consiste en construir modelos (interpretaciones) de dicha teoría en los que la afirmación en cuestión resulte válida y también su negación (uno para la fórmula de interés y otro para su negación), comprobando con ello que esta proposición no puede deducirse de los axiomas de la teoría. Aquí interviene una serie de conceptos lógicos de vital importancia: verdad en una estructura, consecuencia lógica, modelo o interpretación de la teoría, etc. Todos ellos admiten una traducción al lenguaje categórico. En consecuencia, las pruebas de independencia para un sistema deductivo se establecen ahora mediante la aplicación de algún resultado categórico más general, que a su vez sirve para establecer hechos muy distintos en otros campos matemáticos. Por otro lado, los avances en la lógica cuántica mediante la categorización de sus sistemas que pretenden modelar los razonamientos hechos dentro de las teorías de la física cuántica, han revelado conexiones entre sistemas lógicos de las que no se tenía la menor sospecha. El cálculo lambda y la teoría de funciones recursivas también han sido llevados al lenguaje de los funtores y las categorías, resultando en la caracterización de ciertos problemas que pueden ser tratados algorítmicamente. La lista es grande y continúa creciendo.

Al respecto, pueden suscitarse múltiples preguntas de carácter filosófico: ¿Es la teoría de categorías una ontología de la matemática?, ¿el lenguaje categórico captura la naturaleza última de los objetos matemáticos?, ¿la lógica categórica accede a la esencia primaria de los sistemas deductivos? Estas preguntas pueden resultar ambiguas en el estado actual de la investigación, sin embargo no son del todo irrelevantes. Su respuesta, aunque imprecisa, nos acerca a la naturaleza más elemental de la matemática y la lógica.

Conclusión

Podemos decir que existen dos formas de hacer matemáticas. Plantear problemas para luego resolverlos, o teorizar sobre los objetos matemáticos que esos problemas involucran, sin la preocupación en mente de su solución. Ambas formas de proceder se acompañan constantemente. A veces el surgimiento de problemas concretos ha generado la creación de teorías matemáticas que se expanden más allá de los límites iniciales que el problema había fijado. Un ejemplo muy claro de esto es la lógica. Ésta había nacido mucho tiempo atrás antes de que los matemáticos pusieran su atención en ella. Sin embargo, cuando el intento por resolver problemas muy concretos generó contradicciones o sinsentidos en la ciencia matemática, los matemáticos desarrollaron teorías que definieron perfectamente los objetos que aparecían en esos problemas, así como las reglas para su manipulación, e intentaron con ello evitar contradicciones. Las geometrías no euclidianas o la teoría de conjuntos son sólo algunos casos de este proceder. La lógica ha sido para la matemática un pensamiento que teoriza sobre la naturaleza de sus deducciones para intentar delimitar lo que está sólidamente fundamentado y lo que no.

A su vez, la teoría de categorías representa la teorización final sobre la esencia de casi cualquier concepto en la matemática. No surgió mediante una agenda de problemas sin resolver, por lo menos no en el sentido habitual de las matemáticas que avanzan mediante la solución de problemas concretos (por ejemplo, la solución de la conjetura de Poincaré o del teorema de Fermat han originado la creación de teorías diversas). Más bien desde sus inicios ha sido el intento por comprender lo que realmente se hace cuando se opera con objetos matemáticos, que se extiende al intento por comprender la estructura de la matemática entera.

Para la matemática que resuelve problemas, el mayor logro consiste en hallar la solución de un problema que se tenía por imposible. No importa si esa solución en principio es muy complicada o aporta poco al entendimiento de los conceptos en cuestión. Lo importante es simplemente conseguir una respuesta a una pregunta que carecía de ella, obtener una demostración de un hecho que no había sido probado. Después de esto lo que sigue es buscar un problema nuevo.

Por otro lado, para el pensamiento que teoriza (como por ejemplo, la lógica o la teoría de categorías), el logro supremo recae en la construcción de una teoría que arroje luz sobre fenómenos que hasta ese momento son incomprensibles. El triunfo de las matemáticas no consiste en resolver problemas, sino en trivializarlos. La meta final es la creación de una teoría nueva que, sin resolver ninguno de los viejos problemas, los convierta en irrelevantes, una teoría que revele conexiones entre conceptos que se comprenden muy poco y otros que se tienen muy bien entendidos, descubriendo con ello que los problemas que se tenían como irresolubles para el caso de unos, son en realidad asuntos triviales para el caso de otros.

La lógica, desde un punto de vista categórico, intenta realizar esta tarea para sus propios intereses. La consecuencia es, por tanto, una teoría unificada de los sistemas deductivos y las relaciones existentes entre éstos y otros objetos matemáticos. El terreno ganado en la comprensión de la inferencia matemática ha sido de vital importancia. Puede decirse que la recompensa ha sido excepcional.

Referencias

Grothendieck, A. Récoltes et semailles : Réflexions et témoignages sur in passé de mathématicien. Manuscrito inédito disponible en: http://matematicas.unex.es/~navarro/res/res.pdf

Klein, F. (1893). "A Comparative Review of Recent Researches in Geometry". *Bulletin of the New York Mathematical Society*, vol. 2, núm. 10, pp. 215-249. Disponible en: https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183407629

Lawvere, W. & Schnauel, H. (2009). *Conceptual Mathematics. A First Introduction to Categories*. Cambridge: Cambridge University Press [Hay traducción al español por Francisco Marmolejo, en: http://www.acsu.buffalo.edu/~wlawvere/concep-3.pdf]

Mac Lane, S. & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer: Nueva York.

Nagel, E. y Newman, J. (2007). *El teorema de Gödel*. Madrid: Tecnos.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logics. From if to Is*. Cambridge: Cambridge University Press.

Smullyan, R. (2002). *Bosques curiosos y pájaros aristocráticos*. Barcelona: Gedisa.

Tiles, M. (1989). *The Philosophy of Set Theory*. Nueva York: Dover Publications.

Torretti, R. (1978). *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. Dodrecht: Reidel Publishing Company.